

Forschungsberichte
Mechatronik &
Maschinenakustik

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. R. Nordmann

TUD

Robuste Regelung zur aktiven Schwingungsdämpfung elastischer Rotoren mit Piezo-Stapelaktoren

Alireza Alizadeh



Robuste Regelung zur aktiven Schwingungsdämpfung elastischer Rotoren mit Piezo-Stapelaktoren

Vom Fachbereich Maschinenbau
an der Technischen Universität Darmstadt
zur

Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

D i s s e r t a t i o n

vorgelegt von
Dipl.-Ing. Alireza Alizadeh Roshdi
Aus dem Iran, Teheran

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. R. Nordmann

Mitberichterstatter: Prof. Dr.-Ing. H. Hanselka

Tag der Einreichung: 01.06.2005

Tag der mündlichen Prüfung: 04.10.2005

Darmstadt 2005

Forschungsberichte

Mechatronik &

Maschinenakustik

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. R. Nordmann

Robuste Regelung zur aktiven Schwingungsdämpfung elastischer Rotoren mit Piezo-Stapelaktoren

Alireza Alizadeh

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Dissertation selbstständig und nur unter Verwendung der im Literaturverzeichnis angegebenen Hilfsmittel erstellt habe.

01.06.2005

Alireza Alizadeh

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Mechatronik und Maschinenakustik der Technischen Universität Darmstadt. Ihr liegen die Ergebnisse des Forschungsprojekts "Aktive Beeinflussung elastischer Rotoren" zugrunde, welches ich mit der Unterstützung des Fachgebietes bearbeitet habe.

Dem Leiter des Fachgebiets, Herrn Professor Dr.-Ing. Rainer Nordmann, danke ich für die Übertragung der anspruchsvollen Aufgabe, die Unterstützung während der Arbeit und das mir entgegengebrachte Vertrauen. Für die gegebene Gelegenheit, durch die eigenverantwortliche Planung und Durchführung der Aufgabe wertvolle Erfahrungen sammeln zu können, bin ich ebenfalls sehr dankbar.

Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Hanselka danke ich für sein Interesse und die Übernahme des Koreferats.

Den Herren Dr. Ulrich Schönhoff und Dr. Christian Ehmman danke ich für die langjährige und gute Zusammenarbeit im Arbeitskreis "Regelungstechnik" des Fachgebietes sowie für die sehr hilfreiche Vorbereitung und die intensive Einarbeitung in die Thematik dieses Vorhabens.

Ebenso gilt mein Dank allen meinen Kolleginnen und Kollegen des Fachgebiets, die mich durch ihr freundschaftliches Verhalten und fruchtbare fachliche Diskussionen bei meiner Aufgabe unterstützt haben. Insbesondere sind hier die Herren Dr.-Ing. R. Storm, Dipl.-Ing. T. Krüger und Dipl.-Ing. D. Neumeuer zu nennen, die wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben. Für die Durchsicht des Manuskripts möchte ich mich besonders bei den Herren Dipl.-Ing. M. Schönecker und Dipl.-Ing. U. Eehalt bedanken.

Herrn Dipl.-Ing. Rudolf Fischer danke ich für die ausführlichen Diskussionen und die weitreichende Hilfe bei der Implementierung des Reglers in der Praxis.

Zu ganz besonderem Dank bin ich Frau Dr. Evangelia Kasa verpflichtet. Sie hat mir in der letzten Phase der Arbeit den erforderlichen Rückhalt gegeben und mich während der gesamten Zeit uneingeschränkt und tatkräftig unterstützt. Auch meinen Eltern gilt mein Dank für ihre stetige Hilfsbereitschaft und Unterstützung.

Darmstadt, den 28. Februar 2005

Summary

Since the 80's, the use of active bearings to influence the dynamic behaviour of flexible rotors has been intensively researched. Although theoretical knowledge and practical experience from laboratory models and industrial prototypes is available for various configurations of actuators, sensors and control strategies, active bearings are not yet broadly applied in industry. Possible reasons are the absence of an "ideal" active bearing as well as an automatic control concept, which provides sufficient performance under the constraints of practical system. Moreover there is lack of well-priced actuators which satisfy the construction and task requirements.

In order to apply such active vibration controls one needs to solve various more or less complex problems. Researching methods and components to overcome such difficulties and to facilitate the industrial usage of these controls led to the present work. Therefore the main subject of this study is the development of a control concept for an active bearing aiming at the bending vibration damping of elastic rotors. This concept contains the proper selection, positioning and dimensioning of actuators and sensors including the appropriate control strategy.

The first section of this work focuses on the mathematical description of flexible rotors which is achieved by defining an abstract rotor system to study typical vibration problems. Modelling elastic rotors is based on the [RITZ](#)-theory. Thereby many natural bending frequencies can be described with a low system order. The equations of motion are derived according to the [LAGRANGE](#) principle.

The second section discusses the active support. This term describes here a bearing not directly placed on the machine structure but supported by an actuator. The control forces act as relative forces between the fundament and the bearing. In contrast to passive bearings no significant changes on the rotor system are necessary. It is thus easier to integrate the bearing in an already existing machine concept. A piezo-actuator is used in this study. Such actuators can generate forces or displacements and provide a wide application range. Because of the high actuator stiffness only minor changes of the passive system behaviour are expected, which is an advantage in case the actuator breaks down. Dimensioning criteria such as the maximal actuator stroke and diameter are determined for the required control forces and performance of piezo-actuators.

New terms describing the active support are introduced to the equations of motion of the uncontrolled rotor, increasing the system's degree of freedom and leading to a higher model order.

The next section of this work is devoted to the control design. In the beginning the controller design purpose of active damping is determined by means of plant analysis. Developing an appropriate control strategy depends significantly on the kind and location of the applied sensors. Therefore sensors and their positioning are addressed subsequent to treating the actuators. This discussion proceeds in parallel to the study of control algorithms and shows the controller complexity and the achievable performance.

In this framework it is dealt with linear, time invariant controls. A practical, systematical and robust concept is sought, which guarantees the stability of the closed loop system while preserving performance. Two control principles are suggested: collocation and robust synthesis. By using a collocated actor-sensor-pair one can benefit from simpler controllers which guarantee a good performance even with high uncertainty.

If the actuator cannot be placed at the optimal position because of technical reasons, it is possible to increase the performance by positioning the sensor at a relevant place. In this case the collocation drops out and simple control algorithms cannot be applied any more since the stability of the closed loop would be limited. Such instabilities can also arise in the collocation case if the loss of amplitude and phase is large.

With the formalistic robust control synthesis, which is based on a physical model, a second variant is presented. It is based on the well-known methods of the \mathcal{H}_∞ - and the μ -synthesis. These methods offer a good performance and a high robustness of the closed loop control regarding uncertainties, thus allowing a practical implementation of the controller with a high damping ratio.

Since the feasibility of the suggested concepts is a basic requirement for their industrial usage, the last section reports the measurement results on the basis of a laboratory test rig using robust control synthesis. It is shown that time invariant robust control synthesis by means of piezo actuator puts very well the theoretically computed damping ratio into effect and can significantly reduce the resonance amplitude with regard to active damping.

The formalistic design steps of the robust synthesis shows a systematic realization of the automatic controller, whose first and second part, i.e. the modelling and the specification of the performance, must be mastered by the technician. The expenditure of the last step of the control design for robust synthesis is reflected as unfavourable but this complexity is cancelled using the commercial toolboxes.

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis.....	IV
---	-----------

1 Einleitung	1
1.1 Problemstellung	1
1.2 Stand der Forschung	4
1.2.1 Grundlagen der Rotordynamik.....	4
1.2.2 Aktive Schwingungsdämpfung	8
1.2.2.1 Direkter Eingriff am Rotor.....	8
1.2.2.2 Stelleingriff indirekt über die Lager "Lagerabstützung"	10
1.3 Zielsetzung.....	12
2 Rotormodellierung	17
2.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen.....	18
2.1.1 Kinematik	19
2.1.2 Kinetik	23
2.2 Simulation und numerische Untersuchung.....	28
2.2.1 Rotordaten und Konfigurationen	29
2.2.2 Eigenverhalten des Rotors	30
2.2.3 Eigenfrequenzverläufe	32

3	Piezoaktoren	35
3.1	Grundgleichungen des piezoelektrischen Materials	36
3.2	Mechanisches Ersatzmodell eines Piezoaktors	39
3.3	Aktordimensionierung	39
3.3.1	Aktorhub	41
3.3.2	Aktordurchmesser	43
3.4	Schlussbetrachtung	45
4	Regelungsverfahren für die aktive Lagerung	47
4.1	Regelziele	49
4.2	Kollokation von Sensor und Aktor	50
4.2.1	Modellbildung der kollokierten Systeme mit modaler Beschreibung	50
4.2.2	Direkte Geschwindigkeitsrückführung	53
4.2.3	Geschwindigkeitsrückführung mit Tiefpassfilter	56
4.2.4	Beschleunigungsrückführung	58
4.2.4.1	Integration der Beschleunigung zur Rückkopplung	58
4.2.4.2	Regler zweiter Ordnung für Einmassenschwinger	59
4.2.4.3	Regler zweiter Ordnung für SISO-Systeme mit mehreren Eigenmoden	61
4.2.4.4	Beschleunigungsrückführung für MIMO-Systeme	63
4.2.5	Positive Verschiebungsrückführung	64
4.2.5.1	SISO-System	65
4.2.5.2	MIMO-System	66
4.2.6	Integrale Kraftrückführung	67
4.3	Robuste Regelungssynthese	70
4.3.1	Einführung	72
4.3.2	Singulärwerte und \mathcal{H}_∞ -Norm	74
4.3.3	Der Grundgedanke der \mathcal{H}_∞ -Synthese	76
4.3.4	Modellierung der Unsicherheiten	77
4.3.5	Parametrische Unsicherheiten	79
4.3.6	Dynamische Unsicherheiten	83
4.3.7	Problemlösungstechnik der \mathcal{H}_∞ -Methode	84
4.3.8	Spezifikation der Regelgüte	86

4.3.9	μ -Synthese	93
4.4	Schlussbetrachtung	97
4.5	Beispiel	101
5	Experimentelle Untersuchungen.....	107
5.1	Rotorprüfstand	107
5.1.1	Rotor und Lagerung	109
5.1.2	Einrichtungen des aktiven Lagers.....	111
5.1.3	Messeinrichtung und Elektronik.....	113
5.2	Messdaten der unregelmässigen Regelstrecke	115
5.3	Modellbildung.....	117
5.4	Regelung am Rotor	120
6	Zusammenfassung	131
	Literaturverzeichnis.....	135

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Abkürzungen

ALA	Aktive Lagerabstützung
B	Bezugskoordinatensystem
FE	Finite Elemente
I	Inertialkoordinatensystem
LFT	Linear Fractional Transformation
PVDF	Polyvinylidenfluorid
PZT	Piezokeramik; Blei Zirkonat Titanat
R	Rotorfestes Hauptachsensystem
SCC	Standard Compensation Configuration
SVD	Singulärwerte-Zerlegung

Lateinische Buchstaben

A	Rotorquerschnittsfläche
A	Zustandsmatrix
\mathbf{A}_{BR}	Transformationsmatrix vom R - ins B -System
\mathbf{A}_{IB}	Transformationsmatrix vom B - ins I -System
\mathbf{B}	Steuermatrix
C	Elektrische Kapazität bzw. Regler
c_E	Elastizitätstensor
c_{ij}	Lagersteifigkeit

d	Durchmesser
d_i	Störgröße am Eingang der Regelstrecke
d_{ij}	Lagerdämpfung
d_o	Störgröße am Ausgang der Regelstrecke
D	dielektrische Verschiebung
D_a	Außendurchmesser
D_i	Innendurchmesser
\mathbf{D}	Dämpfungsmatrix
e	Regelabweichung
E	Elastizitätsmodul bzw. elektrische Feldstärke
E_{ixi}	Einheitsmatrix $\in \mathbb{R}^{ixi}$
f	Anzahl der Freiheitsgrade des elastischen Rotors pro Richtung
f	Störkraft
\mathbf{F}	Funktionalmatrix
F	Kraft
G	Auswucht-Gütestufe bzw. Übertragungsfunktion
\mathbf{G}	Matrix der Kreisel- und Coriolisanteil
g	Reglerverstärkung
h	Aktorhub
I_p	polares Flächenträgheitsmoment
$I_{x,y}$	Flächenträgheitsmomente
\mathbf{J}	Jacobimatrix
m	Masse
\mathbf{M}	Massenmatrix
n	Messstörung
N	nichtkonservative Matrix
\bar{q}	Minimalkoordinaten
Q	elektrische Ladung
\bar{r}	Vektor der Verschiebungen eines Scheibenelements
$r_x(z,t), r_y(z,t)$	Verschiebung des Scheibenelements in x - bzw. y -Richtung
\mathbf{r}	Vektor der mechanischen Verschiebung
R	Ortsvektor
\dot{s}	Minimalgeschwindigkeit

s	Laplacevariable ($s=j\omega$)
s_E	Nachgiebigkeitstensor
S	Empfindlichkeitsfunktion bzw. mechanische Verformung
\mathbf{S}	Steifigkeitsmatrix
T	Führungsübertragungsfunktion bzw. mechanische Spannung
u	Stellgröße
U	elektrische Spannung
\bar{v}	Zeitvarianter Anteil der Geschwindigkeit eines Scheibenelements
\mathbf{v}, \mathbf{w}	Vektor der Ansatzfunktionen
w	Führungsgröße
W	Unsicherheit, Gewichtungsfunktion
x_R	Zeitfunktion des RITZ -Ansatzes für den Rotor in x -Richtung
y	Regelgröße
y_R	Zeitfunktion des RITZ -Ansatzes für den Rotor in y -Richtung

Griechische Buchstaben

$\underline{\sigma}, \bar{\sigma}$	kleinster bzw. größter Singulärwert einer Übertragungsmatrix
$\bar{\omega}$	zeitvarianter Anteil der Drehgeschwindigkeit eines Scheibenelements
Δ	Unsicherheit
Φ	Matrix der Eigenformen
Ω	Rotordrehgeschwindigkeit
α	Drehwinkel um die z -Achse
ε	Exzentrizität
ε_0	Dielektrizitätskonstante, $\varepsilon_0=8,85 \times 10^{-12}$ F/m
$\varepsilon_S, \varepsilon_T$	Dielektrizitätstensor
φ	Vektor der Drehungen eines Scheibenelements, Eigenvektor
λ	Eigenwert
μ	Strukturierter Singulärwert
π	3.1416...
θ	Verdrehwinkel um die x -Achse
ρ	Dichte des Rotors
ω	Eigenkreisfrequenz

ω_0	Vektor der Winkelgeschwindigkeit
ξ	modaler Dämpfungsgrad
ψ	Verdrehwinkel um die y -Achse

Indizierung links unten

B	Bezugskoordinatensystem
I	Inertialkoordinatensystem
R	Rotorfestes Hauptachsensystem

Operatoren

$ \cdot $	Betrag
$\ \cdot\ $	Norm
\star	Sternprodukt
$\delta()$	Dirac-Funktion
$diag(.)$	Umformung eines Zeilenvektors zu den diagonalen Einträgen einer Matrix

Indizierung rechts oben bzw. oben

$()'$	örtliche Ableitung
$()^e$	eingepägt
$()^T$	transponiert
$()$	zeitliche Ableitung
$(\tilde{})$	Tilde-Operator zur Realisierung des Vektorprodukts als Matrixprodukt

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Bei rotierenden Komponenten einer Maschine treten verschiedene Schwingungsformen auf, wobei insbesondere die Biegeschwingungen des Rotors zu großen Beanspruchungen der Struktur führen können. Die Haupterregung wird meistens durch unvollständige Auswuchtung verursacht. Als weitere Ursachen und Erregungsmechanismen kann man die Spalterregung, Unsymmetrien, Selbsterregung durch Gleitlager etc. anführen. Bei industriell eingesetzten Rotoren, wie beispielsweise Kompressoren, Turbinen, Generatoren, Pumpen, Werkzeugmaschinen spindeln und Getrieben können alle im Kraftfluss liegenden Komponenten durch die Schwingung unnötig belastet werden.

Die Hauptanforderung ist oft ein ruhiger Betriebslauf des Rotors, damit die mechanischen Schwingungen des Rotors

- keine dynamischen Belastungen für alle Maschinenteile verursachen und
- zu keinen unerwünschten akustischen Effekten führen.

Beim industriellen Einsatz wird oft eine hohe Leistung, hohe Geschwindigkeit, und ein schlanker Läufer gewünscht, deshalb müssen meistens zum Erreichen der Betriebsdrehzahl eine oder mehrere Biegeeigenschwingungen durchfahren werden, wobei die Maschine in Resonanzen und somit in einen instabilen

Zustand gerät. Dies kann zu einer schweren Beschädigung der Einzelteile oder sogar der ganzen Maschine führen, zumindest aber die Wartungsintervalle verkürzen, und hierdurch die Betriebskosten erhöhen. Die durch Unwucht erzeugten Schwingungen sind der häufigste Fall. Sie werden durch die vorhandenen Rotorexzentritäten verursacht. Wird dies bei starren Rotoren durch Ausgleichsmassen auf zwei verschiedenen radialen Ebenen am Rotor kompensiert, so steigt hingegen der Aufwand bei biegeelastischen Rotoren, je nach Anzahl der Eigenformen im Betriebsbereich, an. Da aus den obengenannten Gründen die Gefahr der Schwingungen immer besteht und weil die Maschinen einen sehr erheblichen Wert darstellen, wurde immer wieder versucht, jegliche Maßnahmen zu treffen, um die mechanischen Schwingungen zu unterbinden oder möglichst klein zu halten.

Mechanismen zur Schwingungsdämpfung

Einer der Mechanismen zur Schwingungsdämpfung ist das Verfahren der gezielten Platzierung der Eigenfrequenzen, welches meist in der Auslegungsphase angewandt wird. Hierbei wird berücksichtigt, dass keine Eigenfrequenz in der Nähe der Betriebsdrehzahl oder einer fremden Anregungsfrequenz liegt. Eine Änderung der Steifigkeit gelingt durch die Änderung der Massenverteilung oder durch eine Konstruktionsänderung. Zu empfehlen ist, durch die Verringerung des Lagerabstands oder die Erhöhung der Lageranzahl die Systemeigenschaften so weit zu verändern, dass die Eigenfrequenzen in die gewünschten Frequenzbereiche fallen. Der zweite Mechanismus der Schwingungsdämpfung in der Auslegungsphase ist die Dämpfungserhöhung, wobei jedoch die innere Dämpfung bei der Erhöhung der Strukturdämpfung auch eine negative Rolle für die Instabilität einnehmen kann. Die Erhöhung der Dämpfung erfolgt durch Materialänderung, eine zusätzliche äußere passive Dämpfung, und die Benutzung von hydrodynamischen Gleitlagern. Ein weiterer Ansatz bei und nach der Auslegung ist eine möglichst weitgehende Verhinderung der Anregungsmöglichkeiten, welche als Störungen auftreten können. Man spricht hier von Systemisolation. Als Anregungen sind hier vor allem die Unwuchten dominant, welche nach der Auslegung und dem Aufbau, noch bevor das System in Betrieb genommen wird, zu bekämpfen sind.

Das Auswuchten eines Läufers ist eine wesentliche Maßnahme zur Reduzierung der Schwingung der gesamten Maschine, was für einen starren Rotor sehr gut gelingt. Liegt aber ein biegeelastischer Rotor vor, ist dieser wegen der Schwankung des Wuchtzustandes hingegen sehr aufwendig auszuwuchten. Deshalb versucht man, das Problem mit ausreichend hoher Dämpfung zu lösen. Eine andere bereits erwähnte Möglichkeit, welche seit Jahren Anwendung findet, ist der Einsatz von hydrodynamischen Gleitlagern. Die Gleitlager weisen zwar bis zu einer gewissen Drehzahl gute Dämpfungseigenschaften auf, bei höheren Drehzahlen jedoch kommen sie zur eigenen Selbstanregung. Diese Gefahr wird durch die Verwendung von Kippsegmentlagern vermieden, deren Dämpfung jedoch wesentlich geringer ist. Der Quetschöldämpfer ist eine Dämpfungsfunktion, die sich außerhalb des Lagers befindet. Die Idee ist, eine Trennung von Tragfunktion und Dämpfungsfunktion vorzunehmen, deshalb befindet sich der Quetschöldämpfer zwischen dem Lager und dem Gehäuse und spielt die Rolle einer äußeren passiven Lagerdämpfung.

Trotz der genannten Maßnahmen sind die elastischen Biegeeigenschwingungen von Rotoren praktisch immer noch sehr schwer zu unterdrücken. Deshalb ist hier die Verbesserung des dynamischen Verhaltens durch den Einsatz aktiver Elemente in Verbindung mit einer Regelung erforderlich. Man spricht hier von aktiver Schwingungsdämpfung. Der zentrale Gedanke besteht darin, dass Sensoren die Bewegungen erfassen. Die Daten werden an eine Regelung übermittelt, die ihrerseits geeignete Signale an Stellglieder weiterleitet. Die Stellglieder können die Kräfte bzw. Verschiebungen direkt auf den Läufer oder indirekt über die Lager aufbringen.

Zur direkten Beeinflussung der Rotoren setzt man hauptsächlich berührungslose Aktoren ein. Hierbei tragen die Aktoren keine statischen Lasten, da sie keine Lagerfunktion besitzen. Mögliche Stellglieder sind elektromagnetische Aktoren. Der Vorteil eines solchen Prinzips liegt darin, dass die Position des Stelleingriffes veränderlich ist, was für die Optimierung der Aktorposition von Vorteil ist.

Da in vielen Fällen das Anbringen des Stelleingriffes außerhalb der Lagerebene aus Platzmangel und aus Funktionsgründen nicht möglich ist, nutzt man die Lagerebenen, um die Aktoren bzw. die Regelkräfte und -verschiebungen an den Rotor heranzubringen. Die Aktoren werden hierbei entweder in die Lager integriert, oder zwischen den Lagern und dem Gehäuse angebracht. Magnetlager und Ölfilmlager sind Beispiele für integrierte Aktoren in den Lagern. Aufgebracht werden die Kräfte oder Verschiebungen über die Lager, kommen hierbei elektromagnetische-, hydrodynamische- und Piezo-Aktoren als häufig verwendete Stellglieder zur Anwendung.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Auslegung einer aktiven Schwingungsdämpfung durch Piezoaktoren, die indirekt über die Lager Kräfte aufbringen. Den Schwerpunkt dieser Arbeit bilden mögliche Regelungsprinzipien, die im Einzelnen untersucht und miteinander verglichen werden. Die theoretischen Untersuchungsergebnisse werden an einem Prüfstand verifiziert, um auf diese Weise den Nachweis der praktischen Umsetzbarkeit des Denkansatzes zu erbringen.

1.2 Stand der Forschung

1.2.1 Grundlagen der Rotordynamik

Das Forschungsfeld der Schwingungsbekämpfung an elastischen Rotoren hat sich seit etwa 25 Jahren stark erweitert und die Zahl der Publikationen und Veröffentlichungen hierüber ist merklich angestiegen. Da die Theorie der aktiven Schwingungsdämpfung von elastischen Rotoren auf der Rotordynamik basiert, wird im Folgenden kurz die Geschichte der Entwicklung dieses Forschungsgebietes dargestellt. Hierzu werden grundlegende Betrachtungen von Literaturstellen und zum Stand der Technik vorgenommen.

Rotierende Maschinen wurden seit den Anfängen des Maschinenbaus zur Umsetzung und Übertragung von Energie in Form von Kräften und Bewegungen eingesetzt. Wurden die rotierenden Maschinen früher nur nach statischen und kinematischen Gesichtspunkten entworfen, ist heute das dynamische Verhalten

des Rotors von zentraler Bedeutung. Gründe hierfür sind, dass im Zuge der Entwicklung immer weitgehender versucht wurde, eine höhere Leistungsfähigkeit mit geringerem Materialeinsatz zu erreichen, wobei sich die betroffenen Rotoren nicht mehr als starre Systeme betrachten ließen. Das Werk "Das Problem der Laval'schen Turbinenwelle" von [Föppl \(1895\)](#) gehört zu den ersten Büchern über Rotordynamik. Föppl beschreibt die Laval-Läufer in starren Lagern. Die vielfältigen Ursachen der Schwingungen von Maschinen mit rotierenden Teilen werden von [Tondl \(1965\)](#) in seinem Buch "Some Problems of Rotor Dynamics" anhand umfangreicher theoretischer und experimenteller Forschungsergebnisse dargestellt. Als ein weiteres vollständiges Werk zur Rotordynamik ist das Buch von Gasch "Rotordynamik, eine Einführung" zu erwähnen. Die Autoren [Gasch u. Pfützner \(1975\)](#) geben eine detaillierte Einführung in die Dynamik biegeelastischer Läufer. Im Vorwort schreiben die Autoren: "In dieser Einführung in die Dynamik biegeelastischer Läufer haben wir versucht, die Fülle interessanter, oft sogar verblüffender Phänomene am einfachsten Rotormodell darzustellen."; dies beschreibt am treffendsten das Buch. [Gasch, Nordmann u. Pfützner \(2002\)](#) haben das Buch in zweiter Auflage im Jahr 2002 neu überarbeitet, vervollständigt und mit vielfältigen neuen Themen erweitert.

Ausführliche analytische Methoden und ihre Anwendungen auf Rotordynamik-Probleme diskutieren [Dimarogonas u. Paipetis \(1983\)](#) in "Analytical Methods in Rotor Dynamics". Die Modellbildung und Analyse des Rotorsystems für verschiedene Rotorarten und hydraulische Lager werden im Buch "Turbomachinery Rotordynamics" von [Childs \(1993\)](#) vorgestellt. Ein Verfahren zur Bestimmung der kinetischen Bewegungsgleichungen der elastischen Rotoren beruht auf der Verwendung von Ansatzfunktionen. Dies wurde aus der mathematischen Beschreibung von Rotorsystemen in den Arbeiten "Kinetik starr-elastischer Mehrkörpersysteme" und "Dynamik und Regelung Mechanischer Systeme" von [Bremer \(1983 und 1988\)](#) hergeleitet. Dieses Verfahren wurde grundlegend in die Arbeiten von [Fürst \(1990\)](#) und [Althaus \(1991\)](#) miteinbezogen. Die Arbeiten von Fürst und Althaus setzen sich mit der Kinetik und der Kinematik der Bewegungsgleichung des elastischen Rotors auseinander. Die Autoren betrachten einen horizontalen elastischen Rotor mit

segmentweise konstanten Querschnitten, zweifach gelagert wahlweise in Gleit- oder Wälzlagern. Eine Darstellung und Herleitung der Konstruktionsrichtlinien für thermische Turbomaschinen hinsichtlich deren Schwingungssicherheit wird von [Jericha et al. \(1993\)](#) gegeben, wodurch die Eigenfrequenzen hinsichtlich der möglichen Erregungen und die konstruktiven Mittel zur Beherrschung der jeweils unerlässlichen Resonanzdurchgänge abgestimmt werden.

Auswuchten

Eine Zusammenstellung von Maßnahmen zur Vermeidung von Erregerfrequenzen geben [Pfützner u. Market \(1980\)](#). In diesem Buch werden die Maßnahmen zur Verminderung gefährlicher Drehschwingungen im Hinblick auf die Änderung der Massenverteilung und der Steifigkeit, Vergrößerung der Dämpfung des Systems und Auswuchten umfassend diskutiert. Die Theorie des Auswuchtens elastischer Rotoren ist in "Elastisches Wuchten" von [Kellenberger \(1987\)](#) dargelegt. Als Kompromiss zwischen der theoretischen Darstellung der Grundlagen und Ratschläge für praktische Anwendungen des Auswuchtens ist der Beitrag von [Lingener \(1992\)](#) im Buch "Auswuchten - Theorie und Praxis" zu verstehen. Für einen statisch und dynamisch unwichtigen Rotor präsentieren [Gröbel et al. \(2003\)](#) das Verfahren des selbsttätigen Auswuchtens im überkritischen Drehzahlbereich mittels zweier Auswuchtebenen, die je zwei in einer Flüssigkeit mit geeigneter Zähigkeit auf einer Kreisbahn frei bewegliche Kugeln enthalten.

Gleitlager

Eine häufig eingesetzte und auch wirkungsvolle Maßnahme zur Schwingungsdämpfung ist die Verwendung von Gleitlagern, deren Eigenschaften die Dynamik des Rotors entscheidend beeinflussen können. In diesem Zusammenhang wird von [Glienicke \(1972\)](#) eine Reihe an Untersuchungen zur Nachgiebigkeit und Dämpfung der Lagerschmierfilme vorgestellt, wobei ein Vergleich zwischen experimentell und theoretisch ermittelten Dämpfungswerten durchgeführt wird. Eine tabellarische Zusammenstellung von Koeffizienten für

unterschiedlich lineare Gleitlager in gemessenen und berechneten Werten ist in dem "Journal-Bearing Databook" von [Someya \(1989\)](#) zu finden.

Wie bereits erwähnt, treten die durch die Gleitlager selbsterregten Schwingungen in höheren Frequenzen auf. Dieses Problem wird in der Arbeit von [Crandall \(1990\)](#) theoretisch und experimentell untersucht. Die Spalterregung und ihre destabilisierende Wirkung kommen in der Arbeit von [Wohlrab \(1975\)](#) zur Diskussion. [Jecmenica \(1998\)](#) untersucht die Nichtlinearität der Olfilmkräfte von Gleitlagern durch Vergleich der Rechenergebnisse von drei verschiedenen Programmen.

Allgemeine Regelkonzepte

[Korn u. Wilfert \(1982\)](#) führen die in der Rotordynamik verwendeten Regelkonzepte in dem Buch "Mehrgrößenregelungen" auf. In diesem Buch werden die modernen Regel-Entwurfsprinzipien im Zeit- und Frequenzbereich zusammengestellt. In dem Buch "Dynamik und Regelung von Rotorsystemen" von [Ulbrich \(1986\)](#) wird ein Überblick über die Regelung von Rotorsystemen gegeben. Weiterhin gibt der Autor eine Einführung zu Stelleingriffen und Aktoren. Eingehende Untersuchungen zur Modellierung und Regelung eines kugellagerten Rotors sowohl theoretisch als auch experimentell werden von Ulbrich durchgeführt. In dieser Arbeit werden neben verschiedenen Regelkonzepten ebenfalls die Messergebnisse für unterschiedliche Komplexitäten vorgestellt. Neben der kinetischen und kinematischen Untersuchung eines Rotors schlägt [Bremer \(1988\)](#) einige Regelkonzepte vor. Regelungskonzepte mit Zustandsbeobachtung über die Lager ist ein Beitrag von [Söffker \(1997\)](#). Die Verwendung einer robusten Regelung unter Berücksichtigung der Parameteränderung sowie weitere Unsicherheiten in den Rotorsystemen wird von [Schönhoff \(2003\)](#) untersucht. Er berücksichtigt hierbei die Parameterunsicherheiten für den Kreiseffekt.

Ein Regelalgorithmus zur Kompensation von destabilisierenden zirkulatorischen Anregungen eines Rotors wird von [Hirschmanner \(2003\)](#) vorgeschlagen. Hier werden die Fehlerquellen im Schätzalgorithmus für die

Kreuzkopplungssteifigkeit am Beispiel des 2-Freiheitsgradmodells dargelegt und Methoden zur Reduzierung dieser Fehler vorgestellt.

1.2.2 Aktive Schwingungsdämpfung

Die aktive Schwingungsdämpfung am Rotor wird eingesetzt, um die Maßnahmen zur Reduzierung der Biegeschwingung eines Rotors zu verstärken und dadurch die gewünschte Betriebsruhe zu erzielen. Im Prinzip unterscheiden sich die Methoden der aktiven Schwingungsdämpfung nach ihren Eingriffsmechanismen und bilden zwei Gruppen: Einmal wirken die Aktoren direkt auf den Rotor, in der anderen Gruppe geschieht dies indirekt über die Lager.

1.2.2.1 Direkter Eingriff am Rotor

Der direkte Stelleingriff an der Rotorwelle geschieht im Prinzip durch Aufbringen von Aktorkräften an der Welle, entweder an beliebiger Stelle auf der Welle außerhalb des Lagers oder integriert in der Lagerung. Da der Aktor außerhalb des Lagers nicht die Rolle des Lagers spielen muss, ist hierfür ein berührungsloser Aktor geeignet, zum Beispiel ein Magnetlager. Integrierte Aktoren im Lager werden häufig in Ölfilmlagern und ebenfalls in Magnetlagern untergebracht.

Magnetlager

Eine der ersten Arbeiten zur aktiven Schwingungsdämpfung elastischer Rotoren durch ein aktives Magnetlager als Aktor haben [Schweitzer u. Lange \(1976\)](#) durchgeführt. Die theoretischen und experimentellen Untersuchungen für ein Magnetlager werden in ihrer Arbeit präsentiert. Hierbei wird das Verhalten des Aktors als linear betrachtet. Zur aktiven Schwingungsregelung haben [Gondhalekar et al. \(1979\)](#) beigetragen, in dem sie ein Magnetlager ohne eine Vormagnetisierung untersucht und die theoretischen Ergebnisse an einem Prüfstand experimentell verifiziert haben. In einer anderen Publikation schlagen [Gondhalekar u. Holmes \(1984\)](#) ein Magnetlager mit drei Spulen vor, wobei durch eine digitale Signalaufbereitung ein lineares entkoppeltes Verhalten der Stellmagnete erreicht wird.

Eine Methode zur Berechnung einer externen Stellkraft zur Reduzierung der Schwingung eines Rotors mit Gleitlager ist der Arbeit von [Burrows u. Sahinkaya \(1983\)](#) zu entnehmen. Bei diesem Verfahren wird die Verwendung eines Magnetlagers empfohlen. Von [Salm u. Schweitzer \(1984\)](#) wird ein Verfahren vorgeschlagen, mit dem ein kollokierter Ausgangsregler direkt entworfen werden kann. Diese Methode gewährleistet Eigenschaften der Kollokation und Robustheit. Eine weitere Untersuchung von [Salm u. Larssonneur \(1985\)](#) stellt die Problematik des Spillover-Effekts dar. Über eine adaptive Regelung der synchronen Rotorschwingung berichtet [Hope \(1994\)](#). Er beschreibt eine Reihe von Untersuchungen zur Kompensation der Unwuchten. [Larssonneur u. Herzog \(1994\)](#) verwenden hierzu eine Vorwärtsregelung zur Beseitigung der Unwucht. Weiterführende Aussagen aus theoretischen und experimentellen Untersuchungen zu diesem Thema sind in den Arbeiten von [Shafai et al. \(1994\)](#) zu finden. [Starek u. Magdolen \(1993\)](#) untersuchen die Eigenwertplatzierung durch Magnetlager zur Verbesserung des Systemverhaltens.

Neben einer Reihe an Vorteilen existieren bei Magnetlagern jedoch auch Nachteile, welche in der Arbeit von [Gelin et al. \(1990\)](#) spezifiziert werden. Es wird die Notwendigkeit eines zusätzlichen Fanglagers für den Notlauf betont. Weiterer Nachteil des Magnetlagers ist sein großes Bauvolumen. Bei Zentrifugen mit nur teilweise flüssigkeitsgefüllten Behältern bestehen Kopplungen zwischen den Eigenbewegungen der Rotorstruktur und den Bewegungen des mitrotierenden Flüssigkeitsringes. Dies führt in bestimmten Betriebsbereichen zu besonders gefährlichen instabilen Schwingungen, deren Amplituden sehr rasch anwachsen. Zur Stabilisierung dieser instabilen Betriebsbereiche wurden zwei Regelkonzepte von [Ulbrich et al. \(1997\)](#) vorgestellt, wobei als Aktor ein Magnetlager verwendet wird.

Aktive Ölfilmlager

Zur Schwingungsdämpfung hat [Pfeiffer \(1993\)](#) eine direkte Regelung über die Ölschichten von Gleitlagern vorgeschlagen. Von [Santos \(1993\)](#) werden Schmierfilme mit und ohne zusätzliche Ölzufuhr verglichen und eine deutliche Veränderung der Tragkräfte wird präsentiert. Anhand einer theoretischen und

experimentellen Untersuchung von Kippsegmentlagern hat Santos (1995) bewiesen, dass die globalen Koeffizienten des Lagers und die Dämpfungskoeffizienten von der Drehzahl abhängig sind. Er zeigte, dass Schwingungen mit subharmonischen Komponenten bei kippsegmentgelagerten Rotoren auftreten können, welche sehr stark von der Reduzierung der Dämpfungskoeffizienten des Ölfilms und von den Nichtlinearitäten der Steifigkeitskoeffizienten des Ölfilms abhängen. Eine theoretische Untersuchung des Einflusses einer zusätzlichen Ölzuführung auf das statische und dynamische Verhalten des Schmierfilms wird von Wu u. Pfeiffer (1997) durchgeführt. Durch ein durchflussregelbares Gleitlager wurde theoretisch ein elastischer Rotor geregelt und die Simulationsergebnisse zur Schwingungsdämpfung vorgestellt. Wu (1999) hat gezeigt, dass die günstigste Lage der Lagerbohrungen für die zusätzlichen Ölzuführung anhand der Forderung nach dem niedrigsten Leistungsbedarf an der Ölversorgung ermittelt wird und es nicht günstig ist, viele zusätzliche Lagerbohrungen in einem Lager anzuordnen.

1.2.2.2 Stelleingriff indirekt über die Lager "Lagerabstützung"

In letzter Zeit forscht man vermehrt im Bereich aktiver Schwingungsdämpfung mit indirektem Stelleingriff. Mit dieser Strategie werden die Stellkräfte oder Stellverschiebungen von außen auf die konventionellen Lager und somit indirekt auf den Rotor aufgeprägt. Zur Realisierung der Lagerabstützung gibt es drei weitverbreitete Methoden: Elektromagnetische Lagerabstützung, hydraulische Kammersysteme und Piezo-Stapelaktoren.

Elektromagnetische Lagerabstützung

Zum ersten Mal haben Moore et al. (1980) vorgeschlagen, die Stellkräfte durch einen Stelleingriff indirekt über das Lagergehäuse zu erzeugen. Sie haben theoretisch die Erhöhung der Schwingungsdämpfung anhand eines sehr einfachen Rotormodells untersucht. Eine Studie von Stanway u. Burrows (1981) präsentiert Resultate von theoretischen Untersuchungen zum Stelleingriff über ein konventionelles Gleitlager. Die Studie betrachtet einen einfachen gleitgelagerten Rotor mit aktiver Lagerabstützung. Durch die Untersuchung der Steuerbarkeit und der Beobachtbarkeit wurde die Anzahl der minimal

notwendigen Stelleingriffe bestimmt. Dies führt zu dem Ergebnis, dass wegen Kreuzkopplungen ein Stelleingriff theoretisch ausreichend ist. Erste experimentelle Untersuchungen, den Stelleingriff über Lager wirken zu lassen, sind in der Arbeit von [Lewis et al. \(1982\)](#) beschrieben. Hiernach benutzt man einen elastischen kugelgelagerten Rotor als Prüfstand, wobei das Lagergehäuse über elektromagnetische Stellmotoren abgestützt ist. Zur elektromagnetischen Lagerabstützung wird ein Zustandsreglerentwurf mit Hilfe einer Polvorgabe durch [Stanway u. O'Reilly \(1984\)](#) theoretisch durchgeführt. Die elektromagnetische Lagerabstützung wird in der Dissertation von [Fürst \(1990\)](#) verwendet, um einen regelungstechnischen Entwurf einer aktiven Lagerabstützung zur Schwingungsdämpfung von biegeelastischen Rotoren systematisch vorzustellen. Das Hauptziel seiner Arbeit liegt in einem praktisch verwendbaren Verfahren zur Regelauslegung.

Hydraulisches Kammersystem

Die hydraulischen Kammersysteme werden erstmals von [Ulbrich u. Althaus \(1988\)](#) vorgeschlagen. In dieser Arbeit wird neben dem Vorschlag eines aktiven Kippsegmentlagers auf einen neuen elektro-hydraulischen Aktor eingegangen, welcher mit elastischen ölgefüllten Kammern ausgerüstet ist. Als weiterführende Arbeit werden ausführlich theoretische und experimentelle Untersuchungen eines Hydraulikkammersystems als Aktor zum Zweck aktiver Lagerabstützung von [Weidemann \(1988\)](#) und [Althaus \(1991\)](#) durchgeführt. Hier wird der Versorgungsdruck der Kammer durch Servoventile gesteuert. [Althaus et al. \(1993\)](#) vergleichen zwei unterschiedliche Reglerkonzepte miteinander, wobei die Regleroptimierung durch Maximierung der Dämpfung des Systems erfolgt. Eine konstruktive Realisierung eines schnellen aktiven Lagerringes wird für Werkzeugmaschinen-spindeln in der Arbeit von [Hagemeister \(1997\)](#) vorgestellt. Als Stellelement wird hier ein hydrostatisch entlasteter Kolben verwendet, wobei das ansteuernde Ventil sich direkt in den Kolben integrieren lässt.

Piezo-Stapelaktor

Die Idee, Piezo-Stapelaktoren als Stellglieder für den indirekten Stelleingriff über die Lager zu verwenden, stammt von [Palazzolo u. Lin \(1989, 1991\)](#). Es wurden theoretische und experimentelle Untersuchungen durchgeführt. In ihrem Versuch werden die Einsatzmöglichkeiten zur aktiven Schwingungsdämpfung von Rotoren durch die Messung aufgezeigt. Sie verwenden einen einfachen Regler. [Kascak et al. \(1990\)](#) erweitern diese Studie mit der Untersuchung eines weichen und eines harten Lagers. Sie zeigen, dass starre Lager durch den Piezo-Stapelaktor eines Rotors aktiv zu dämpfen sind. Es wird folgendermaßen interpretiert, dass wegen der geringen Weg-Erzeugung die Piezo-Stapelaktoren in der Regel die Rotorbewegung nur über zusätzliche Hilfslager beeinflussen können. Anwendungen von Piezo-Stapelaktoren zur Verringerung der Biegeschwingungen sind in [Tzou u. Garde \(1990\)](#) zu finden. [Horst u. Wölfel \(2003\)](#) haben bei der aktiven Schwingungsdämpfung durch Piezoaktoren theoretisch eine Verringerung der Resonanzüberhöhung um den Faktor 10 erreicht. Sie haben gezeigt, wie ein Piezoaktor mit seinen ladungserzeugenden Fähigkeiten als passiver Dämpfer verwendet werden kann, indem die in mechanischer Resonanz erzeugte Energie an einem ohmschen Widerstand dissipiert wird.

1.3 Zielsetzung

Die Verwendung aktiver Lagerungen wird seit den 80er Jahren intensiv erforscht, um das dynamische Verhalten elastischer Rotoren zu beeinflussen und zu verbessern. Trotz umfangreicher Studien und einer Vielzahl an theoretischen und experimentellen Untersuchungen während der letzten fünfundzwanzig Jahre beschränkt sich der Einsatz der aktiven Lagerung nur auf wenige Sonderfälle in industriellen Anwendungen. Dies betrifft selbst die Verfahren, die nur auf einfachen Regelungsverfahren wie einer lokalen PD-Regelung und einer Platzierung der Eigenwerte basieren. Gründe hierfür sind möglicherweise das Fehlen eines "idealen" aktiven Lagers mit ausreichender Anpassungsfähigkeit an die jeweiligen Erfordernisse, sowie die Schwierigkeiten der Realisierung eines komplexen, durch numerische Optimierung gelungenen Regelkonzeptes, das

unter den Einschränkungen praktischer Systeme dennoch hinreichende Regelgüte ermöglicht.

Eine aktive Schwingungsdämpfung über die Lager wird als aktive Lagerung oder aktive Lagerabstützung bezeichnet. Diese folgt dem Prinzip, dass das Aufbringen von Kräften bzw. Verschiebungen am stillstehenden Teil eines ohnehin vorhandenen Wälz- oder Gleitlagers, d.h. in Reihe mit dem Kraftfluss der rein passiven Maschine, wirkt.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, im Rahmen der Mechatronik ein regelungstechnisches Verfahren für eine aktive Lagerabstützung zur Optimierung der dynamischen Eigenschaften bzw. zur Schwingungsdämpfung von elastischen Rotoren, zu entwickeln. Die zu entwickelnde aktive Lagerung sollte eine sichere und robuste Regelung unter Berücksichtigung der Unsicherheiten besitzen. Zusätzlich wird eine einfache und kompakte Bauweise mit ausreichender Aktorleistung im bezweckten Frequenzbereich vorausgesetzt.

In Rahmen dieser Arbeit ist es von starkem Interesse, für bestehende Rotorsysteme eine Konstruktion vorzuschlagen, die die Systemeigenschaften so wenig wie möglich ändert und ohne umfangreichen sensorischen Aufwand hohe aktive Dämpfungsgrade der tiefsten Rotoreigenfrequenz ermöglicht.

Ein weiteres Ziel ist die Vertiefung der bereits vorliegenden theoretischen und experimentellen Arbeiten und eine Gegenüberstellung der verschiedenen Regelkonzepte zur Beurteilung der Funktionalität und der technischen Realisierbarkeit der entwickelten aktiven Lagerabstützung. Der zentrale Gedanke ist hierbei, ein funktionelles anwendbares Regelkonzept vorzulegen, das eine gute Stabilität unter Beibehaltung der Regelgüte gewährleistet. Kennzeichnend für das Regelkonzept sollte sein, dass für vorgegebene Rotordaten und für ein gegebenes Ziel ein Algorithmus entwickelt wird, der das Optimierungsziel unter verschiedenen Randbedingungen wie z.B. der Parameterveränderlichkeit oder der Ungenauigkeit des komplexen Systemmodells erreicht. Es sollte hierbei die geeignete Auswahl und die optimale Positionierung der Sensoren und Aktoren erarbeitet werden.

Als technisch sinnvolle Aktoren in Kolbenform für die aktive Lagerabstützung stehen zurzeit drei Typen mit unterschiedlichen physikalischen Wirkprinzipien zur Verfügung; nämlich elektromagnetische Aktoren, hydraulische Aktoren sowie Piezoaktoren.

Bei der Anwendung aktiver Maßnahmen muss hinterfragt werden, ob die Leistung der Aktoren ausreichend ist und ob hierfür die nötigen Amplituden erzeugt werden können. Eine häufige Forderung an eine aktive Lagerabstützung ist, dass die statische Steifigkeit des aktiven Systems nicht geringer sein sollte als die des rein passiv gelagerten Systems, falls neben den reinen Unwuchtkräften auch andere statische und dynamische Prozesskräfte relevant sind. Das bedeutet, dass die Aktorstefigkeit zumindest in der Größenordnung der in Reihe geschalteten passiven Wälz- oder Gleitlager liegen muss. Es wäre sogar besser, wenn sie darüber liegen würde. Durch diese Anforderung scheidet der elektromagnetische Aktor aus, da man mit einem sinnvollen Bauvolumen lediglich passive Steifigkeiten um 1-2 Größenordnungen unter denen von Wälzlager realisieren kann. Elektromagnetische Aktoren eignen sich wohl eher zur Parallel- als zur Reihenschaltung.

In Bezug auf die Steifigkeit kann man weder dem hydraulischen Aktor noch dem Piezo-Stapelaktor einen klaren Vorzug geben. Bei entsprechender konstruktiver Gestaltung liegen in beiden Fällen die realisierbaren Steifigkeiten oberhalb der Steifigkeit der passenden Wälzlager. Im Hinblick auf die Anschaffungs- und Betriebskosten sowie die erreichbare Linearität und Stelldynamik liegt der Vorteil auf der Seite der Piezoaktoren. Die Stellamplitude ist zumindest niederfrequent bei den hydraulischen Aktoren größer. Weitere Vorteile der Piezoaktoren gegenüber anderen Aktoren sind deren große Kräfte, die hohe Dynamik, gute Linearität, der geringe Energieverbrauch sowie deren hohe Steifigkeit. Mit dem Einsatz dieser Aktoren bleiben meistens die Lager genügend starr und ändern sich die Eigenfrequenzen des Systems kaum.

Nach einer thematischen Einführung und der Beschreibung der Zielstellung in vorliegender Arbeit werden zunächst in Kapitel 2 die theoretischen Grundlagen

der Rotordynamik erläutert. Anschließend werden die numerischen Gleichungen, basierend auf einem einfachen Rotormodell, aufgestellt.

Im dritten Kapitel wird Allgemeines über Piezoaktoren vorgestellt und die mathematische Gleichung der Piezo-Stapelaktoren erläutert. In diesem Kapitel wird gezeigt, dass die realisierbaren Stellwege von Piezoaktoren hinreichend für die aktive Dämpfung von Rotoren sind. Hierzu wird definiert, welchen Anforderungen ein Piezoaktor genügen muss, um für praktische Anwendungen geeignet zu sein. Ein mechanisches Ersatzmodell des Piezoaktors wird vorgeschlagen.

Das Kapitel 4 handelt von Mechatronik und geht auf die Zusammensetzung der Bauteile des aktiven Systems ein. Nach Erstellung der Systemgleichungen, werden im Kapitel 4 die Ziele der Regelung definiert, unterschiedliche Reglerkonzepte dargestellt und am numerischen Rotormodell demonstriert. Basierend auf den Simulationsergebnissen werden Vor- und Nachteile der Regelstrategien gegenüberstellend diskutiert und die Vorteile einer robusten Regelung aufgezeigt. Hierbei werden Aspekte angeführt, die bei der praktischen Realisierung der aktiven Lagerabstützung relevant sind. Zur besseren Erfassung des Problems wird dieses Kapitel mit einem realen industriellen Beispiel abgeschlossen.

Zur Ergänzung dieser Arbeit werden im Kapitel 5 experimentelle Untersuchungen vorgestellt, die an einem Labor-Versuchsstand durchgeführt worden sind. In diesem Zusammenhang wird der verwendete Versuchsstand beschrieben. Das dynamische Verhalten beider Fälle, des rein passiven und des mit aktiver Lagerabstützung ausgerüsteten Systems, wird anhand von Messergebnissen analysiert.

In der Zusammenfassung werden anhand der Untersuchungs- und Praxisergebnisse die wichtigsten Aussagen der Studie (Merkmale, Quintessenzen) herausgestellt und analysiert und mögliche vertiefende Forschungsansätze vorgeschlagen.

2 Rotormodellierung

In diesem Kapitel wird die mathematische Beschreibung des unregulierten Systems "elastischer Rotor" vorgenommen. Hierbei handelt es sich um ein Mehrkörpersystem, welches aus elastischem Rotor und starren Komponenten (Lagermassen, Fundament) besteht. Die einzelnen Teilsysteme sind durch Feder-Dämpfer-Elemente, welche die Freiheitsgrade der einzelnen Bestandteile nicht einschränken, miteinander verknüpft. Äußere Kräfte (Fremderregung, Regelkräfte) können an jedem Teilkörper angreifen. Dieses System wird in den folgenden Kapiteln für verschiedene Möglichkeiten der aktiven Schwingungsdämpfung verwendet.

Es wird ein Rotorsystem definiert, welches die Beschreibung möglichst aller relevanten Einflüsse auf die Biegeschwingungen eines elastischen Rotors ermöglichen soll. Die Gleichungen werden dergestalt hergeleitet, dass die einzelnen Körper zunächst separat behandelt werden können und anschließend mit Hilfe von [JACOBI](#)-Matrizen (Funktionaldeterminante) zu einem Gesamtsystem zusammengefügt werden. Hierdurch ist eine Einbindung des Stellgliedes in die Bewegungsgleichungen des Rotorsystems möglich. Die angegebene Herleitung der Bewegungsgleichungen basiert in wesentlichen Punkten auf [Bremer \(1983\)](#), [Ulbrich \(1986\)](#), [Althaus \(1987\)](#) und [Fürst \(1990\)](#).

Das zugrunde gelegte mechanische Ersatzmodell ist in Abb. 2.1 dargestellt. Hier betrachtet man einen elastischen Rotor mit bereichsweise konstanten

Querschnitten, der horizontal zweifach in Wälzlager gelagert ist, deren Gehäuse starr mit dem raumfesten Fundament verbunden sind.

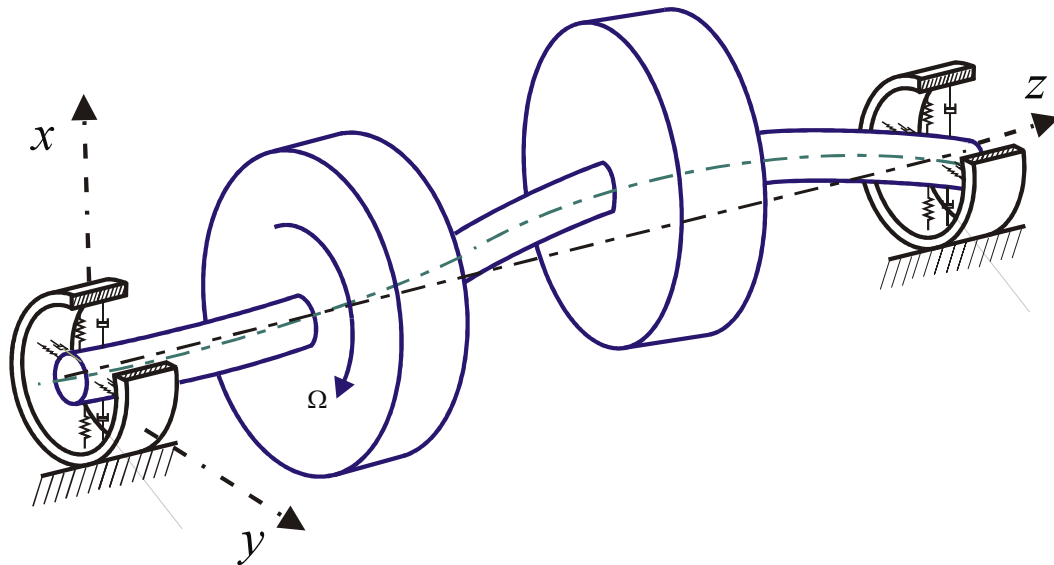


Abb. 2.1: Elastischer Rotor

2.1 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Das zu beschreibende Rotorsystem setzt sich aus mehreren elastischen Teilen und Starrkörpern zusammen. Dieser Abschnitt befasst sich mit der mathematischen Beschreibung eines elastischen Rotors und schließlich der Modellierung des Gesamtsystems.

Die Modellierung richtet sich dabei hauptsächlich nach der Aufgabenstellung und dem dafür angemessenen bzw. gerechtfertigten Aufwand. Das Ergebnis ist ein mathematisches Modell, anhand dessen die notwendigen Berechnungen durchgeführt werden können. Die Gleichungen müssen einerseits die wesentlichen Einflüsse enthalten, um das Systemverhalten richtig zu beschreiben und andererseits möglichst einfach sein, um eine gute Übersicht und eine einfache Interpretation der Ergebnisse sowie eine numerisch effiziente Auswertung zu erlauben.

Das Verhalten eines elastischen Rotors wird hier als linear betrachtet. Die Ansatzfunktionen sind voneinander unabhängig und beschreiben als

Linearkombination den Rotor. Die zugehörigen Zeitfunktionen stellen die Minimalkoordinaten des Rotors dar. Die notwendigen Annahmen und Voraussetzungen sind in [Fürst \(1990\)](#) erwähnt.

2.1.1 Kinematik

Kinematik ist die Lehre von den Bewegungen, ohne Berücksichtigung der Kräfte. Es besteht also die Aufgabe, das Modell mathematisch zu beschreiben. Dies beinhaltet die Beschreibung der Lage und der Orientierung der einzelnen Körper sowie die Bestimmung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, zunächst ohne zu berücksichtigen, wie die Bewegungen zustande kommen.

Koordinatensysteme

Ausgangspunkt der Beschreibung ist ein infinitesimales Scheibenelement des Rotors. Die drei zur Beschreibung der Kinematik verwendeten Koordinatensysteme sind nach Abb. 2.2 als rotorfestes Hauptachsensystem R , Bezugskoordinatensystem B und Inertialkoordinatensystem I definiert.

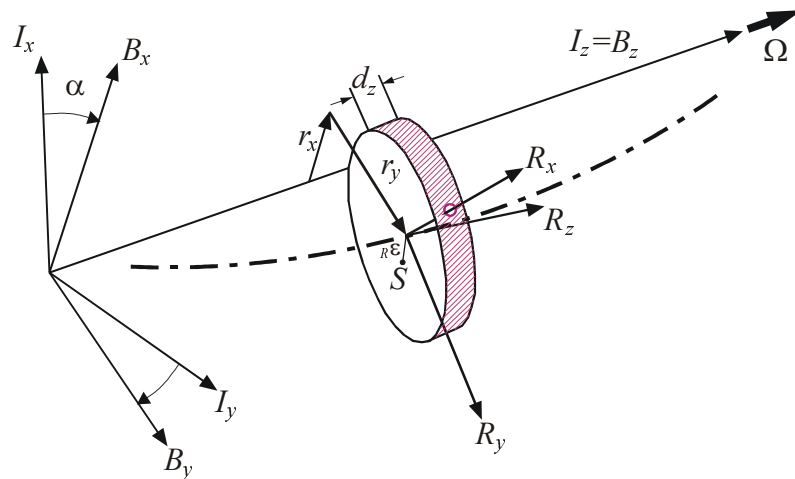


Abb. 2.2: Koordinatensystem des Rotors

Der Vektor der absoluten Drehung des Bezugskoordinatensystems B ist ω_0 mit der Rotordrehgeschwindigkeit Ω ,

$$\omega_0 = (0, 0, \Omega)^T. \quad (2.1)$$

Die Drehungen eines Scheibenelements gegenüber dem Bezugskoordinatensystem B werden über Kardanwinkel zusammengefasst im Vektor φ beschrieben

$${}_B\varphi = (\theta, \psi, 0)^T, \quad (2.2)$$

worin θ und ψ die Winkel zwischen der R_x - und B_x -Achse bzw. der R_y - und B_y -Achse sind.

Beschreibung der Translations- und Rotationsbewegung

Der Ortsvektor r für ein Scheibenelement mit kleiner Unwucht, ausgedrückt im B -System nach [Althaus \(1991\)](#), lautet

$${}_B r = {}_B r_z + {}_B \bar{r} + (E_{3 \times 3} + {}_B \tilde{\varphi}) \cdot {}_R \mathcal{E}. \quad (2.3)$$

Während die Vektoren ${}_R \mathcal{E}$ und ${}_B r_z$ zeitlich konstant sind, sind die Verformungsvektoren ${}_B \bar{r}$ und ${}_B \varphi$ zeit- und ortsabhängig und machen deshalb die Bewegungsgleichungen zu partiellen Differentialgleichungen. Eine Möglichkeit, gewöhnliche Differentialgleichungen zu erhalten, besteht darin, die Koordinaten der Teilrotoren mit Hilfe eines [RITZ](#)-Ansatzes durch Linearkombinationen der Ansatzfunktionen anzunähern

$$\begin{aligned} r_x(z, t) &= w^T(z) \cdot x_R(t), \\ r_y(z, t) &= v^T(z) \cdot y_R(t), \end{aligned} \quad v, w, x_R, y_R \in IR^f \quad (2.4)$$

mit einer bestimmten Anzahl f von gewählten Ansatzfunktionen pro Koordinatenrichtung, die damit die Anzahl der elastischen Freiheitsgrade des Rotors für jede Richtung festlegt. Diese Ansatzfunktionen beschreiben die Lage des Schwerpunktes S eines scheibenförmigen Rotorelements gegenüber dem Bezugssystem. Wegen der Rotationssymmetrie lassen sich für die x - und y -Komponenten gleiche Ansatzfunktionen verwenden, d.h. $w(z) = v(z)$.

Für die einzelnen Komponenten des Winkels ${}_B \varphi$ der Verdrehungen des Scheibenelements (2.2) gilt wegen der vorausgesetzten kleinen Drehungen, dass der Drehwinkel gleich der Steigung der Biegelinie in der dazu senkrecht stehenden Richtung ist:

$$\psi = \frac{\partial r_x(z,t)}{\partial z}, \quad \theta = \frac{\partial r_y(z,t)}{\partial z} \quad (2.5)$$

Aufgrund dieser Gleichungen lässt sich ${}_B\varphi$ als Funktion der Ansatzfunktionen $v = w$ schreiben. Stellt man die Zeitfunktion x_R und y_R in Vektorschreibweise dar, so ergibt sich \bar{q} als verallgemeinerte Koordinaten aus (2.2) (2.4) und (2.5)

$$\begin{bmatrix} {}_B\bar{r} \\ {}_B\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_T \\ \mathbf{J}_R \end{bmatrix} \cdot \bar{q}, \quad (2.6)$$

mit

$$\bar{q}(t) = [x_R^T(t), y_R^T(t)]^T, \quad x_R(t), y_R(t) \in \mathbb{R}^{2f}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{J}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{w}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{w}'^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{J}_R = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{w}'^T \\ \mathbf{w}'^T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}_R, \mathbf{J}_T \in \mathbb{R}^{3,2f}, \quad (2.8)$$

und \mathbf{J}_T und \mathbf{J}_R sind die JACOBI-Matrizen der Translation bzw. der Rotation.

Unter Vernachlässigung von Termen zweiter Ordnung erhält man die absolute Geschwindigkeit aus der absoluten zeitlichen Ableitung des Ortsvektors ${}_B\bar{r}$ aus (2.3)

$$\begin{aligned} {}_B\boldsymbol{\nu} = {}_B\dot{\bar{r}} &= {}_B\dot{\bar{r}} + \tilde{\omega}_0 [{}_B\bar{r} - (E_{3 \times 3} + {}_B\tilde{\varphi}) \cdot {}_R\boldsymbol{\varepsilon}] + (E_{3 \times 3} + {}_B\tilde{\varphi}) \cdot {}_B\dot{\tilde{\varphi}} \cdot {}_R\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ &= \tilde{\omega}_0 \cdot {}_R\boldsymbol{\varepsilon} + \underbrace{{}_B\dot{\bar{r}} + \tilde{\omega}_0 \cdot {}_B\bar{r} + {}_R\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot {}_B\dot{\tilde{\varphi}} - \tilde{\omega}_0 \cdot {}_R\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \cdot {}_B\varphi}_{{}_B\bar{\boldsymbol{\nu}}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die Geschwindigkeit ${}_B\boldsymbol{\nu}$ wird in einen zeitvarianten Anteil ${}_B\bar{\boldsymbol{\nu}}$ und in einen zeitinvarianten Anteil $\tilde{\omega}_0 \cdot {}_R\boldsymbol{\varepsilon}$ aufgespalten.

Da der Trägheitstensor im R -Koordinatensystem konstante Elemente besitzt, wird die absolute Drehgeschwindigkeit des Scheibenelements in diesem Koordinatensystem angeschrieben.

$$\begin{aligned} {}_R\boldsymbol{\omega} &= (E_{3 \times 3} - {}_B\tilde{\varphi}) \cdot (\omega_0 + {}_B\dot{\varphi}) \\ &= \underbrace{\tilde{\omega}_0 \cdot {}_B\varphi - {}_B\tilde{\varphi} \cdot {}_B\dot{\varphi} + {}_B\dot{\varphi}}_{{}_R\bar{\boldsymbol{\omega}}} + \omega_0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Wie in (2.9) erfolgt auch hier eine Aufspaltung in einen Anteil der freien Bewegungen ${}_R\bar{\boldsymbol{\omega}}$ und einen Anteil ω_0 der Führungsbewegung.

Die Translations- und Drehgeschwindigkeiten werden oft linear mittels der *Minimalgeschwindigkeiten* \dot{s} dargestellt, [Bremer \(1988\)](#), daher gilt

$$\begin{bmatrix} {}_B\bar{U} \\ {}_R\bar{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{F} \cdot \dot{s} \quad , \quad \mathbf{F} \in IR^{6,2f} \quad , \quad \dot{s} \in IR^{2f} \quad (2.11)$$

mit $f \in IN$ als Anzahl der Freiheitsgrade des elastischen Rotors pro Richtung und \mathbf{F} als der Funktionalmatrix. Sowohl \dot{s} als auch \mathbf{F} sind noch zu bestimmen. Deshalb müssen jedoch die allgemeingültige Zerlegung der Geschwindigkeiten in Funktionalmatrix und Minimalgeschwindigkeit \dot{s} von (2.11) explizit für den speziellen Fall des Rotorsystems durchgeführt werden. Damit folgt aus (2.9) und (2.10) in Matrixschreibweise

$$\begin{bmatrix} {}_B\bar{U} \\ {}_R\bar{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & {}_R\tilde{\varepsilon}^T \\ 0 & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}_B\dot{\vec{r}} \\ {}_B\dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_0 & \tilde{\omega}_0 \cdot {}_R\tilde{\varepsilon}^T \\ 0 & \tilde{\omega}_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}_B\bar{r} \\ {}_B\phi \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \mathbf{F} \cdot \dot{s} \quad (2.12)$$

Mit dem Einsetzen von (2.6) in (2.12) und unter Vernachlässigung der Größen 2. Ordnung ergibt sich

$$\begin{bmatrix} {}_B\bar{U} \\ {}_R\bar{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_T \\ \mathbf{J}_R \end{bmatrix} \cdot \dot{\bar{q}} + \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_0 & 0 \\ 0 & \tilde{\omega}_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{J}_T \\ \mathbf{J}_R \end{bmatrix} \cdot \bar{q} \stackrel{!}{=} \mathbf{F} \cdot \dot{s} \quad (2.13)$$

Mit der Zerlegung der Matrixprodukte $\tilde{\omega}_0 \mathbf{J}_R$ und $\tilde{\omega}_0 \mathbf{J}_T$ können sich folgende Definitionen für \mathbf{F} und \dot{s} ergeben:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_T \\ \mathbf{J}_R \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} \in IR^{6,2f} \quad (2.14)$$

$$\dot{s} = \dot{\bar{q}} + \mathbf{W} \cdot \bar{q} \quad , \quad (2.15)$$

wobei

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{\Omega} \\ \mathbf{\Omega} & 0 \end{bmatrix} \text{ mit } \mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega} \cdot E_{2f \times 2f} \quad ; \quad \mathbf{\Omega} \cdot E_{2f \times 2f} \in IR^{2f,2f} \quad (2.16)$$

Bei der Darstellung der Bewegungsgleichung im Inertialsystem ergibt sich $\dot{\bar{q}} = 0$, somit gilt $\dot{s} = \mathbf{W} \cdot \bar{q}$.

2.1.2 Kinetik

Die Herleitung der Bewegungsgleichungen erfolgt nach dem **d'ALEMBERT**-Prinzip, **Bremer (1983)**

$$\int_{(S)} \delta r^T (\ddot{r} dm - d\mathbf{f}^e) = 0. \quad (2.17)$$

Diese Herleitung entspricht dem Prinzip der virtuellen Arbeit. Hierbei ist δr die mit den Bindungen verträgliche virtuelle Verschiebung und \mathbf{f}^e beinhaltet alle eingprägten Kräfte. Die Gleichung (2.17) beschreibt den Impulssatz für ein Massenelement dm und wird häufig als **d'ALEMBERT**-Prinzip in der Fassung von **LAGRANGE** bezeichnet.

Eine direkte Anwendung von (2.17) für das elastische Rotorsystem wird in **Althaus (1990)** vorgeschlagen. Man erhält mit den Ausdrücken für die translatorischen und rotatorischen Geschwindigkeiten (2.9) und (2.10)

$$\sum_{i=1}^n \int_{K_i} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial \dot{s}} \\ \frac{\partial \omega}{\partial \dot{s}} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} m^* \dot{v} + \tilde{\omega}_0 (m^* v) - \mathbf{f}^e \\ I^* \dot{\bar{\omega}} + (\tilde{\omega}_0 I^* - \widetilde{I^* \bar{\omega}_0}) \bar{\omega} + \mathbf{g}_R - \mathbf{l}^e \end{bmatrix} + \left(\frac{\partial V}{\partial \bar{q}} \right)^T + \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\bar{q}}} \right)^T \right\}_i = 0, \quad (2.18)$$

wobei die Drehgeschwindigkeit in einen großen Anteil (Führungsbewegung) und einen relativ überlagerten vergleichsweise kleinen Anteil; nämlich $\omega = \omega_0 + \bar{\omega}$ zerlegt worden ist, **Bremen(1988) Seite 135**. Diese Gleichung enthält den Impuls- und Drallsatz von **EULER**. Es wurden hier zwei weitere Anteile der virtuellen Arbeit aufgrund des elastischen Biegepotentials V und der **RAYLEIGH**-Funktion R (Dissipationsfunktion, innere Dämpfung) in die Gleichung eingefügt. Hier ist n die Anzahl der Körper.

Die obere Zeile von (2.18) ist die Impulsgleichung im Bezugskoordinatensystem B und die untere Zeile die Drallbeziehung im rotorfesten Hauptachsensystem R . Dadurch ergeben sich konstante Werte für m^* und I^* , welche die Massen bzw. Massenträgheitsmomente des Scheibenelements darstellen. Sie lauten

$$m^* = \frac{\partial m}{\partial z} dz = \rho A dz, \quad (2.19)$$

$$I^* = \frac{\partial I}{\partial z} dz = \rho \cdot \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} dz, \quad (2.20)$$

Aus (2.13) und (2.18) ergibt sich die Bewegungsgleichung für den i -ten Körper

$$\mathbf{M}_i \cdot \ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{G}_i \cdot \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{h}_i, \quad (2.21)$$

worin mit der Berücksichtigung von (2.8) und (2.14) die Massenmatrix M und die gyroskopische Matrix G in Abhängigkeit von den geometrischen Größen, der Rotordrehgeschwindigkeit und den Ansatzfunktionen ausgedrückt werden durch

$$\mathbf{M}_i = \int_i \left\{ \rho A \begin{bmatrix} \mathbf{w}\mathbf{w}^T & 0 \\ 0 & \mathbf{w}\mathbf{w}^T \end{bmatrix} + \rho I_x \begin{bmatrix} \mathbf{w}'\mathbf{w}'^T & 0 \\ 0 & \mathbf{w}'\mathbf{w}'^T \end{bmatrix} \right\} dz, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{G}_i = \int_i \left\{ \Omega \rho A \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{w}\mathbf{w}^T \\ \mathbf{w}\mathbf{w}^T & 0 \end{bmatrix} + \Omega \rho (I_x - I_p) \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{w}'\mathbf{w}'^T \\ \mathbf{w}'\mathbf{w}'^T & 0 \end{bmatrix} \right\} dz, \quad (2.23)$$

mit der Rotorlänge l .

Der Vektor \mathbf{h} beinhaltet Unwuchtkräfte, die äußeren Kräfte (z.B. Regelkräfte) und Kräfte, welche durch die Bewegung angrenzender Körper verursacht werden.

Die Verbindung zwischen Rotor und Lager für verschiedene Lagerungen (z.B. Gleitlager, Wälzlager) wird durch eine Steifigkeitsmatrix \mathbf{C} und eine Dämpfungsmatrix \mathbf{D} formuliert. Die Kräfte lassen sich aus der Auslenkung r_L des Rotors am Lager und der entsprechenden Auslenkung r_R des benachbarten Lagerkörpers errechnen mit

$$\mathbf{f}_L = - \underbrace{\begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} & 0 \\ c_{yx} & c_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot (r_L - r_R) - \underbrace{\begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xy} & 0 \\ d_{yx} & d_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \cdot (\dot{r}_L - \dot{r}_R). \quad (2.24)$$

Im Lager werden keine Momente übertragen, d.h. $\mathbf{l}_L = 0$. Aus dem Anteil r_L folgt über (2.6) und (2.18) für das i -te Lager die Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix für die Bewegungsgleichungen des Rotors,

$$\mathbf{S}_{L_i} = \mathbf{J}_{T_{Li}}^T \cdot \mathbf{C}_i \cdot \mathbf{J}_{T_{Li}}, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{D}_{L_i} = \mathbf{J}_{T_{Li}}^T \cdot \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{J}_{T_{Li}}. \quad (2.26)$$

Dabei ist $\mathbf{J}_{T_{Li}}$ die **JACOBI**-Matrix der Translation an der Stelle des i -ten Lagers. Als zusätzliche äußere Kraft geht der Anteil r_R über die **JACOBI**-Matrix dieses Körpers in die Bewegungsgleichung des Gesamtsystems ein.

Für die virtuellen Arbeiten werden aufgrund des elastischen Biegepotentials V und der **RAYLEIGH**-Funktion der inneren Dämpfung R in (2.18) unter Zugrundelegung der linearen Elastizitätstheorie die Ansätze

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}'^T \mathbf{H}_V \boldsymbol{\varphi}' \text{ und} \quad (2.27)$$

$$R = \frac{1}{2} d_i \dot{\boldsymbol{\varphi}}'^T \mathbf{H}_V \dot{\boldsymbol{\varphi}}' \quad (2.28)$$

verwendet mit $\mathbf{H}_V = \text{diag}(EI_x, EI_y, GI_p)$, wobei d_i die Konstanten für die innere Dämpfung ist. Schubverformungen sind darin nicht berücksichtigt. Die Potential- und Dämpfungskräfte lassen sich über den obigen Ansatz mit einer Steifigkeitsmatrix \mathbf{S}_V sowie einer Dämpfungsmatrix \mathbf{D}_R beschreiben,

$$\int_K \left(\frac{\partial V}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \right)^T = \int_l EI_x \begin{bmatrix} \mathbf{w}'' \mathbf{w}''^T & 0 \\ 0 & \mathbf{w}'' \mathbf{w}''^T \end{bmatrix} dz \cdot \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{S}_V \cdot \bar{\mathbf{q}}, \quad (2.29)$$

$$\int_K \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\bar{\mathbf{q}}}} \right)^T = d_i \int_l EI_x \begin{bmatrix} \mathbf{w}'' \mathbf{w}''^T & 0 \\ 0 & \mathbf{w}'' \mathbf{w}''^T \end{bmatrix} dz \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}} = \mathbf{D}_R \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}}. \quad (2.30)$$

Bei der Transformation der Drallanteile vom rotorfesten Koordinatensystem R in das Bezugskordinatensystem B kommt aufgrund der Rotorwinkelbeschleunigung $\dot{\Omega}$ eine nichtkonservative (schiefsymmetrische) Matrix \mathbf{N}_B in der Bewegungsgleichung hinzu, **Wu (1999)**,

$$\mathbf{N}_B = \dot{\Omega} \int_l \rho I_p \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{w}' \mathbf{w}'^T \\ -\mathbf{w}' \mathbf{w}'^T & 0 \end{bmatrix} dz. \quad (2.31)$$

Die entstehenden Bewegungsgleichungen im Bezugssystem B werden zusammengefasst zu

$$\left\{ \underset{B}{M} \ddot{\mathbf{s}} + \underbrace{(\mathbf{G} + \mathbf{D}_R + \mathbf{D}_L)}_{\mathbf{D}} \dot{\mathbf{s}} + \underbrace{(\mathbf{S}_L + \mathbf{S}_V + \mathbf{N}_B - (\mathbf{D}_R + \mathbf{D}_L))}_{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{h} \right\}. \quad (2.32)$$

Die Dämpfungsterme haben einen wegproportionalen Anteil. Dies ergibt sich aus (2.15). Der Vektor \mathbf{h} beinhaltet die Unwuchterregung, die eingepprägten Kräfte wie von Feder/Dämpfer-Verbindungselementen, Potentialkräfte aus der elastischen Verformung und äußere Kräfte sowie die Regelkräfte.

Um die Differentialgleichungen im Inertialkoordinatensystem zu beschreiben, müssen beim Übergang die kleinen Abweichungen $\dot{\mathbf{s}}$ und $\bar{\mathbf{q}}$ in das zu betrachtende System projiziert werden. Unter Berücksichtigung rechtsorthogonaler Basen erhält man für den Zusammenhang zwischen den alten Koordinaten und den durch ein Dach-Symbol " ^ " gekennzeichneten neuen Koordinaten

$$\bar{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{A}}_{IB}^T \hat{\bar{\mathbf{q}}}, \quad (2.33)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{A}}_{IB}^T \dot{\hat{\mathbf{s}}}, \quad \ddot{\mathbf{s}} = \dot{\hat{\mathbf{A}}}_{IB}^T \dot{\hat{\mathbf{s}}} + \hat{\mathbf{A}}_{IB}^T \ddot{\hat{\mathbf{s}}}. \quad (2.34)$$

Die zugehörige Transformationsmatrix lautet:

$$\hat{\mathbf{A}}_{IB} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{S} \\ \mathbf{S} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \mathbf{S} &= \text{diag}(\sin \alpha) \in \mathbb{R}^{f,f} \\ \mathbf{C} &= \text{diag}(\cos \alpha) \in \mathbb{R}^{f,f} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Einsetzen in (2.32) ergibt:

$$\hat{\mathbf{A}}_{IB} \mathbf{M} \hat{\mathbf{A}}_{IB}^T \ddot{\hat{\mathbf{s}}} + \left(\hat{\mathbf{A}}_{IB} \mathbf{D} \mathbf{A}_{IB}^T + \dot{\hat{\mathbf{A}}}_{IB} \mathbf{M} \dot{\hat{\mathbf{A}}}_{IB}^T \right) \dot{\hat{\mathbf{s}}} + \hat{\mathbf{A}}_{IB} \mathbf{S} \hat{\mathbf{A}}_{IB}^T \hat{\bar{\mathbf{q}}} = \hat{\mathbf{A}}_{IB} \mathbf{h} \quad (2.36)$$

Nach der Transformation gilt $\dot{\hat{\mathbf{s}}} = \dot{\hat{\bar{\mathbf{q}}}}$. Die Auswertung von (2.36) führt zu den endgültigen Gleichungen für den elastischen Rotor

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\hat{\bar{\mathbf{q}}}} + \hat{\mathbf{D}} \dot{\hat{\bar{\mathbf{q}}}} + \hat{\mathbf{S}} \hat{\bar{\mathbf{q}}} = \hat{\mathbf{h}}. \quad (2.37)$$

Die Darstellung der Matrizen in (2.37) befindet sich zusammengefasst in [Pfeiffer \(1993\)](#), Tabelle 1. Der Einfluss des Fundaments auf das System könnte hier zwar berücksichtigt werden, d.h. das Modell wird durch Einbeziehung des Fundaments und der Lager, die als Starrkörper betrachtet werden, erweitert. Dies wird jedoch im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt. Weiterhin wird der Übersichtlichkeit halber auf das Dach-Symbol " ^ " verzichtet.

Beim Zusammenwirken mehrerer Körper (elastisch und/oder starr) wird ein gemeinsamer Vektor der Minimalkoordinaten \bar{q}_G definiert

$$\bar{q}_G = \begin{bmatrix} \bar{q}_1^T & \bar{q}_2^T & \dots & \bar{q}_{n_K}^T \end{bmatrix}, \quad \bar{q}_G \in \mathbb{R}^{f_G}. \quad (2.38)$$

Setzt man dies in die Bewegungsgleichung (2.37) ein, so erhält man dann die Bewegungsdifferentialgleichung des gesamten Rotorsystems.

$$\mathbf{M}_G \ddot{\bar{q}}_G + \mathbf{D}_G \dot{\bar{q}}_G + \mathbf{S}_G \bar{q}_G = \mathbf{h}_G \quad (2.39)$$

Zur numerischen Simulation ist die Darstellung der Bewegungsgleichung im Zustandsraum notwendig. Da die Massenmatrix \mathbf{M} stets positiv definit ist, [Nordmann \(2001\)](#), lässt sich (2.39) zu einer Differentialgleichung erster Ordnung mit doppelten Dimensionen als Zustandsraumdarstellung (ZRD) umschreiben.

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \bar{\mathbf{h}}_G + \mathbf{B}u \quad (2.40)$$

Dabei gelten die folgenden Definitionen,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}_G^{-1} \mathbf{S}_G & -\mathbf{M}_G^{-1} \mathbf{D}_G \end{bmatrix}, \quad x = \begin{Bmatrix} \bar{q}_G \\ \dot{\bar{q}}_G \end{Bmatrix} \\ \bar{\mathbf{h}}_G &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_G^{-1} \hat{\mathbf{h}}_G \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M}_G^{-1} \hat{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A} &\in \mathbb{R}^{2f_G \times 2f_G}, \quad x \in \mathbb{R}^{f_G}, \quad \bar{\mathbf{h}}_G \in \mathbb{R}^{f_G}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{f_G \times r} \\ \mathbf{h}_G &= \hat{\mathbf{h}}_G + \hat{\mathbf{B}}u. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Hierin ist \mathbf{A} die Zustandsmatrix, x der Zustandsvektor und r die Anzahl der am System angreifenden Stellkräfte. Die äußeren Kräfte \mathbf{h}_G aus (2.39) lassen sich in zwei Teile aufspalten: Die Stör- und Anregungskräfte $\hat{\mathbf{h}}_G$ und die Stellgrößen $\hat{\mathbf{B}}u$.

Um die Matrizen zu bestimmen, müssen zuerst geeignete Ansatzfunktionen gewählt werden. Es wird hier nur eine endliche Anzahl von Ansatzfunktionen verwendet; man erhält eine Näherungslösung. Die Genauigkeit dieser Näherungslösung hängt stark von der Anzahl und der Art der verwendeten Ansatzfunktionen ab. Es muss daher ein Kompromiss zwischen einer möglichst genauen Beschreibung durch eine hohe Anzahl von Ansatzfunktionen und einem

numerisch vertretbaren Aufwand gefunden werden. Es eignen sich hierzu die Eigenformen des nichtrotierenden Rotors mit idealisierten Lager-Ersatzsteifigkeiten. Die Bestimmung der Ansatzfunktionen geschieht hier mit Hilfe kubischer Splinefunktionen (Polynome dritten Grades), die sich besonders für die numerische Verarbeitung am Rechner eignen.

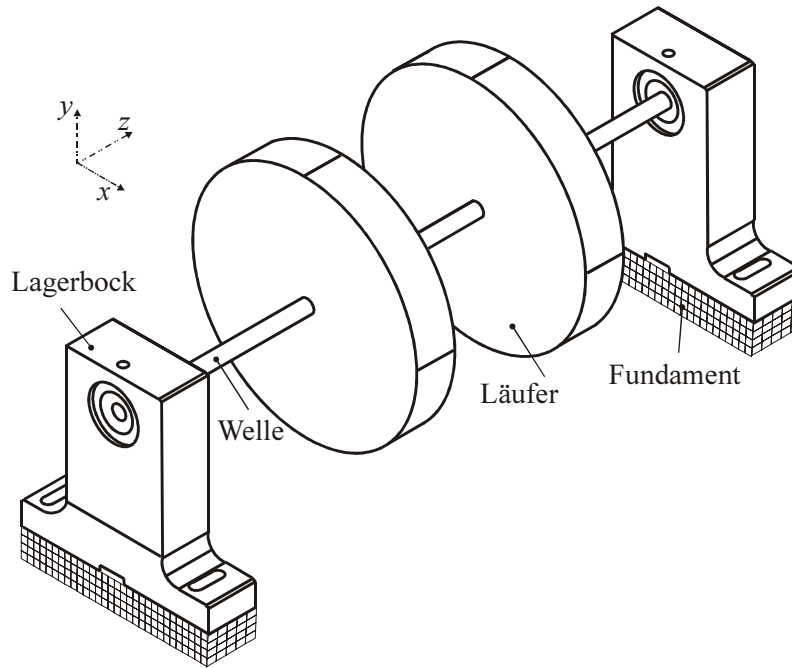


Abb. 2.3: Mechanisches Ersatzmodell des Prüfstandes

2.2 Simulation und numerische Untersuchung

Die Realisierung der aktiven Schwingungsdämpfung eines Rotorsystems setzt im Allgemeinen gute Kenntnisse der Regelstrecke voraus. Deshalb können durch die Simulationsrechnung und später durch den Vergleich mit der Messung einerseits eine Überprüfung der beschriebenen Modellierung und andererseits die Untersuchung des dynamischen Verhaltens des Rotors erfolgen. Hierdurch können die grundlegenden Probleme von elastischen Rotoren im Zusammenhang betrachtet werden.

Ein sehr wichtiges Attribut zur Beurteilung der Systemdynamik ist das Eigenverhalten, das durch die Eigenvektoren und Eigenwerte charakterisiert wird. Es beschreibt die dynamischen Eigenschaften und die Stabilität eines jeden Systems und besagt, ob das System ausreichende Dämpfung aufweist.

2.2.1 Rotordaten und Konfigurationen

Bei den numerischen Untersuchungen wurden die Systemdaten des Prüfstandes derartig gewählt, dass neben den numerischen Ergebnissen ebenfalls eine praktische Umsetzung im Experiment durch eine spätere Realisierung des Versuchsstandes möglich ist und ein Vergleich der beiden Ergebnisse durchgeführt werden kann. Abb. 2.3 zeigt das mechanische Ersatzmodell des Rotorprüfstandes. Der Rotor wird als ein elastischer Körper betrachtet.

Läufer		
Anzahl der Läufer	2	
Masse je Läufer	1.78	kg
Läuferlänge	20	mm
Läuferdurchmesser	120	mm
Abstand der linken Rotorscheibe vom linken Lager	110	mm
Abstand der rechten Rotorscheibe vom linken Lager	170	mm
Dichte des Rotors (Läufer aus Stahl)	7850	kg/m ³
Elastizitätsmodul	2,1E11	N/mm ²
Rotorwelle		
Durchmesser der Welle	9,5	mm
Masse des Läufers	0,177	kg
Lagerabstand	270	mm
Dichte der Welle (Läufer aus Stahl)	7850	kg/m ³
Abstand der Rotormessebene vom linken Lager	135	mm
Abstand der Kupplung vom linken Lager	298	mm
Steifigkeit der Kupplung in Biegerichtung	100	N/mm ²
Lager		
Lagersteifigkeit	5E6	N/mm ²

Tabelle 2.1: Rotordaten

Ferner wird die aktive Lagerung mit dem Rotor modelliert und als zusätzlicher Freiheitsgrad betrachtet. Eine ausführliche Vorstellung des Rotorprüfstandes wird in Kapitel 5 gegeben. Die Daten für die Modellierung sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst. Um eine möglichst problemlose Umsetzung der numerisch bestimmten Parameter auf das reale Rotorsystem zu erreichen, ist eine genaue Modellierung erforderlich. Die Modellierung des Rotors erfolgt als kontinuierlicher elastischer Balken, wobei eine Diskretisierung nach dem **RITZ**-Verfahren vorgenommen wird. Für das Rotormodell werden die Biegeeigenformen bei der Drehzahl $\Omega = 0$ berücksichtigt. Die Dynamik der Lagerungen wird durch Feder-Dämpfer-Paare beschrieben. Die über die Lager übertragenen Kräfte lassen sich über die Auslenkung des Rotors am Lager und die entsprechende Auslenkung des benachbarten Lagerkörpers darstellen. Die Kupplung zwischen Rotor und Antrieb wird als rotationssymmetrische Feder zwischen Rotor und Umgebung betrachtet. Da die ausgewählte Kupplung biegeweich ist, setzt man voraus, dass hierdurch kein Biegemoment übertragen wird. Deshalb verzichtet man hier auf die Modellierung der Kupplung. Die Fundamentsbewegung wird wegen des großen Massenverhältnisses und guter Isolation zwischen Fundament, Rotor und Gestell vernachlässigt.

2.2.2 Eigenverhalten des Rotors

Es wird hier eine qualitative Aussage über das Eigenverhalten des wälzgelagerten Rotors getroffen, mit deren Hilfe eine Kontrolle der Modellierung vorgenommen werden sollte. Da mechanische Systeme meist eine schwache Dämpfung aufweisen, lässt sich die Analyse der Eigenformen unter Vernachlässigung der Dämpfung ohne große Abweichung der Eigenfrequenzen durchführen. Bei der Vernachlässigung der Dämpfung ergibt sich aus der Bewegungsgleichung (2.39) das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{xx} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{yy} \end{pmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_G + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{G}_{xy} \\ -\mathbf{G}_{yx} & 0 \end{pmatrix} \dot{\bar{\mathbf{q}}}_G + \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{xx} & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_{yy} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{q}}_G = 0 \quad (2.42)$$

Zur Bestimmung der Eigenwerte $\hat{\lambda}_j$ und der Eigenvektoren $\hat{\mathbf{q}}_j$ wird die Ansatzfunktion

$$\bar{\mathbf{q}}_G = \hat{\mathbf{q}}_j e^{\hat{\lambda}_j t} \quad (2.43)$$

mit $\hat{q}_j = \begin{bmatrix} \hat{q}_{x_j}^T & \hat{q}_{y_j}^T \end{bmatrix}^T$ in (2.42) eingesetzt. Hieraus lässt sich

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{xx} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{yy} \end{pmatrix} \hat{\lambda}_j^2 + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{G}_{xy} \\ -\mathbf{G}_{yx} & 0 \end{pmatrix} \hat{\lambda}_j + \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{xx} & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_{yy} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \hat{q}_{x_j} \\ \hat{q}_{y_j} \end{pmatrix} = 0 \quad (2.44)$$

errechnen. Die beiden Richtungen x und y sind über die schiefsymmetrische Gyroskopie-Matrix miteinander verkoppelt. Da der Rotor eine Symmetrie bezüglich der x - und y -Richtung aufweist, ergibt sich für die Eigenvektoren

$$\hat{q}_{y_j} = -i\hat{q}_{x_j}. \quad (2.45)$$

Hierdurch können die Bewegungsgleichungen entkoppelt werden. Werden die Eigenwerte des ungedämpften Systems $\hat{\lambda}_i = i\hat{\omega}_j$ gewählt, erhält man dann die folgende reelle Bewegungsgleichung:

$$\left[-\mathbf{M}_{xx}\hat{\omega}_j^2 + \mathbf{G}_{xy}\hat{\omega}_j + \mathbf{S}_{xx} \right] \hat{q}_{x_j} = 0 \quad (2.46)$$

Aus dieser Gleichung kann der j -te Eigenvektor \hat{q}_{x_j} entnommen und in den separaten Ansatzfunktionen nach (2.4) eingesetzt werden

$$\hat{r}_y(z) = \mathbf{w}^T(z) \cdot \hat{q}_{x_j}. \quad (2.47)$$

Diese Eigenfunktionen entsprechen den Biegeeigenformen eines Balkens, wenn die Drehzahl $\Omega = 0$ Hz ist. Als Beispiel für die Ergebnisse sind in Abb. 2.4 die ersten vier Eigenfunktionen für den Rotor bei der Drehzahl $\Omega = 0$ Hz dargestellt. Beim rotierenden Rotor kann eine deutliche Änderung der Eigenfunktionen in Abhängigkeit von den Drehzahleinflüssen (z.B. Kreiseffekte) beobachtet werden.

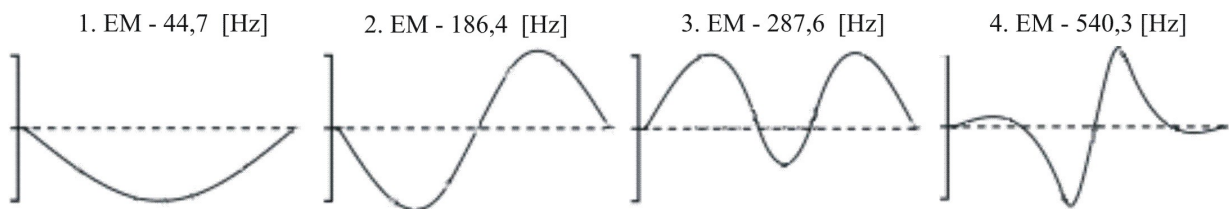


Abb. 2.4: Eigenmoden des Rotors bei Wälzlagerung und $\Omega = 0$ (EM: Eigenmode)

Um die Ergebnisse zu überprüfen, wurden die Eigenfunktionen des Rotorprüfstandes mit einem FE¹-Programm sehr genau berechnet (hohe Anzahl von Freiheitsgraden).

Im Rahmen der Zeichengenauigkeit sind die Eigenmoden aus beiden Berechnungsverfahren gleich. Dies ist aus dem Vergleich der über das FE-Programm ermittelten Eigenmoden in Tabelle 2.2 mit Abb. 2.4 zu erkennen. Tabelle 2.2 zeigt den Vergleich der ersten vier Eigenfrequenzen aus dem **RITZ**-Verfahren mit den Resultaten, die über das FE-Programm erhalten wurden. Mit einer Abweichung kleiner als 2% im relevanten Bereich stimmen die Eigenfrequenzen ebenfalls sehr gut überein.

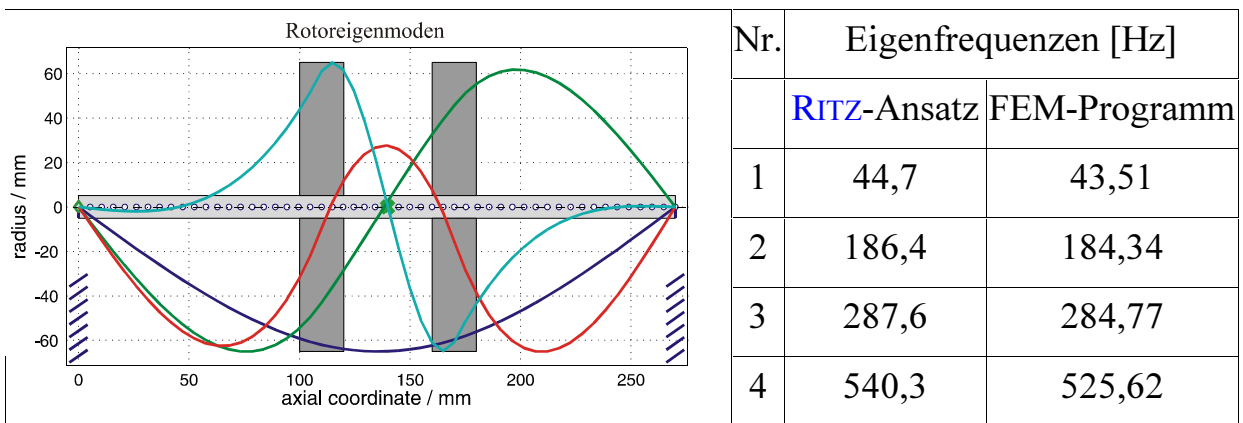


Tabelle 2.2: Eigenmoden des Rotors aus dem FEM-Programm und Vergleich der Eigenfrequenzen beider Methoden

Bei Berücksichtigung der Kopplung bewirkt der Kopplungseinfluss für die ersten beiden Eigenschwingungen eine nur geringfügige Anhebung der Eigenfrequenzen, verändert aber die höheren Eigenschwingungen deutlich, d.h. es ergeben sich andere Eigenformen mit deutlich höheren Frequenzen, [Fürst \(1990\)](#).

2.2.3 Eigenfrequenzverläufe

Die Zustandsraumdarstellung eines mechanischen Systems wurde in (2.40) beschrieben. Ist die Systemmatrix A in dieser Gleichung von veränderlichen Parametern abhängig, so hängen auch die Eigenwerte und die daraus abgeleiteten Kriterien von diesen Parametern ab. Einer der wichtigsten variablen Parameter in

¹ Finite Elemente

einem Rotorsystem ist die Rotordrehzahl Ω . So besteht z.B. eine direkte Abhängigkeit des gyroskopischen Anteils (Kreiseffekt) von Ω . Daher werden in der Rotordynamik bestimmte Kenngrößen, z.B. die Eigenfrequenzen ω_i , über der Rotordrehzahl aufgetragen. Hierbei wird eine "quasi-stationäre" Betrachtungsweise verwendet, d.h. für die Berechnung eines jeden Drehzahlpunktes wird die Rotordrehzahl als konstant vorausgesetzt.

Entsprechend der maximalen Betriebsdrehzahl des Rotors von 12000 RPM ist eine Modellierung für einen Drehzahl- und Eigenfrequenzbereich bis ca. 200 Hz erforderlich. Es zeigte sich, dass für den untersuchten Rotorprüfstand (siehe Tabelle 2.2) die ersten beiden Biegeeigenfrequenzen in diesem Frequenzbereich liegen. In Abb. 2.5 ist der Verlauf der ersten drei Biegeeigenfrequenzen über der Rotordrehzahl für den wälzgelagerten Rotorprüfstand abgebildet.

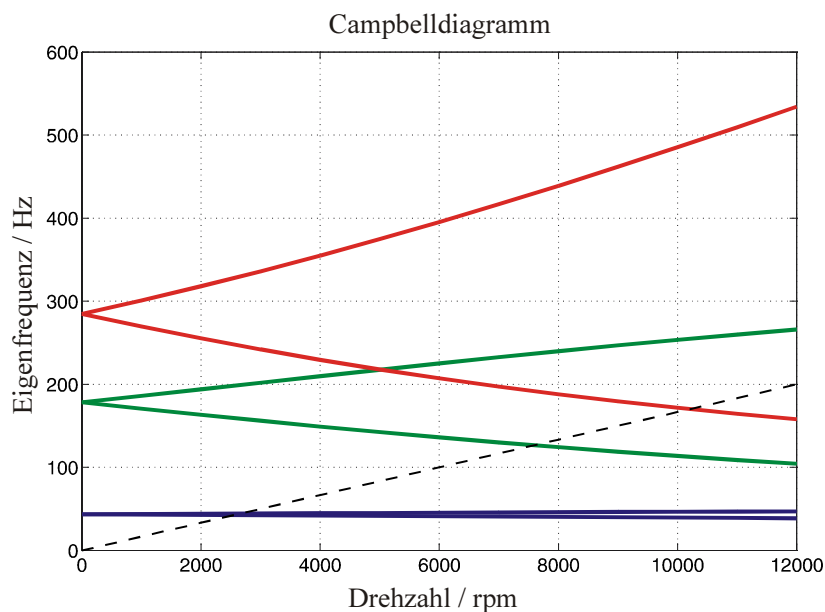


Abb. 2.5: Rotoreigenfrequenz ω in Abhängigkeit der Drehzahl Ω

Während die Frequenzen der ersten Biegeeigenform nahezu unabhängig von der Drehzahl sind, spaltet sich die zweite und dritte Biegeeigenform in x- und y-Richtung in eine ansteigende gleichläufige Eigenform (Notation) und eine abfallende gegenläufige Eigenform (Präzession) auf. Die Aufspaltung der Eigenfrequenzen ist auf die Kreiseffekte (Drallsatz) zurückzuführen, [Gasch et al. \(2002\)](#). Von größerer technischer Bedeutung sind im Allgemeinen die

gleichläufigen Eigenformen, da sie durch die umlaufenden Unwuchtkräfte anregbar sind, die gegenläufigen Eigenformen jedoch nicht (Scheinresonanz). Durch raumfeste Erregerquellen lassen sich beide Eigenfrequenzen anregen.

Die Schnittpunkte der eingezeichneten Hochlaufgeraden $\omega = \Omega$ mit den "gleichläufigen Eigenfrequenzkurven" geben die Stellen an, an denen die möglichen Resonanzen (kritische Drehzahlen) durch Unwuchtanregung auftreten. Wegen des großen Massenträgheitsmoments des Läufers in x- bzw. y-Richtung und des damit verbundenen stark ausgeprägten Kreiseffekts schneiden sich Hochlaufgerade und gleichläufige zweite und dritte Eigenform nicht.

3 Piezoaktoren

Eine der wesentlichen Komponenten in der Mechatronik sind "*Aktoren*", die die Stellkräfte oder -wege zur Steuerung und Regelung des Prozesses zur Verfügung stellen. Wirken bei der aktiven Lagerung die Stellkräfte auf den äußeren Ring von Lagern ein, so bietet dies bei der praktischen Umsetzung zwei Vorteile. Zum einen sind die im Maschinenbau verwendeten Lager von außen her meist leichter zugänglich als die von ihnen umschlossenen Wellen und zum anderen hat man dadurch freie Wahl bei der Verwirklichung der Stellkraft.

In der vorliegenden Arbeit sollte der Stelleingriff für die aktive Schwingungsdämpfung über ein mit Piezo-Stapelaktoren ausgestattetes Lager erfolgen. Aus diesem Grund widmet sich dieses Kapitel den am Lager verwendeten Piezoaktoren, die zur aktiven Dämpfung von Rotoren verwendet werden. Es werden die Begriffe, Grundgleichungen, die Modellierung und Dimensionierung einer aktiven Lagerabstützung durch Piezo-Stapelaktoren präsentiert.

In mechatronischen Systemen fehlen häufig leistungsfähige Stellsysteme bzw. Aktoren, deren Aufgabe es ist, einen geregelten Energietransfer zu vollziehen. Für industrielle Anwendungen sind ausreichende Kräfte bzw. Stellfrequenzen, kleines Bauvolumen, geringe Anschaffungs- und Betriebskosten und eine lange Lebensdauer von besonderem Interesse.

3.1 Grundgleichungen des piezoelektrischen Materials

Das Grundprinzip von piezoelektrischen Materialien ist die Verformung der Molekularstruktur des Piezos durch elektrische Spannung. Dies wird durch Verschiebung von Ionen jeder Einheitszelle in den Kristallen verursacht. Sie erzeugen selbst keine Kräfte, sondern Verformungen und werden daher auch als Dehnungsaktoren (Strain Induced Actuators) bezeichnet. Erst wenn die Verformung durch die anderen Komponenten, die in Verbindung mit dem Aktor stehen, zwangsweise verhindert wird, entstehen Kräfte.

In piezoelektrischen Materialien sind die elektrischen und die mechanischen Größen miteinander gekoppelt. Das elektromechanische Verhalten eines piezoelektrischen Materials bei kleinen Dehnungen und kleinen elektrischen Feldstärken näherungsweise kann durch das Werkstoffgesetz [IEEE \(1988\)](#) "Standards für piezoelektrische Materialien" beschrieben werden.

$$\begin{bmatrix} S \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_E & d^T \\ d & \varepsilon_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ E \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

wobei $\begin{bmatrix} s_E & d^T \\ d & \varepsilon_T \end{bmatrix}$ als Werkstoffmatrix bezeichnet wird, [IEEE \(1988\)](#).

Vernachlässigt man die Effekte in den zur Polarisationsrichtung senkrecht stehenden Richtungen, so werden die Gleichungen für die Polarisationsrichtung nachfolgend behandelt. Es handelt sich hier um die Modellierung piezoelektrischer Aktoren unter ausschließlicher Berücksichtigung der Polarisationsrichtung, wenn der Aktor unter quasistatischen Bedingungen, d.h. bei Frequenzen weit unterhalb der ersten Eigenfrequenzen des Aktors arbeitet. Hier kann der Einfluss der Trägheit vernachlässigt werden, [Ruschmeyer \(1995\)](#). Abb. 3.1 stellt einen Aktor im quasistatischen Betrieb dar.

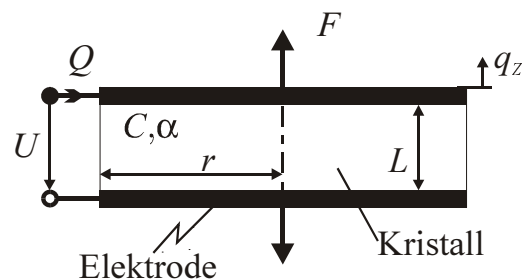


Abb. 3.1: Longitudinal-Piezoaktor im quasistatischen Betrieb

Beim Anlegen der elektrischen Spannung U wirkt die Kraft F und der Aktorendpunkt verschiebt sich um die Strecke q_z . Hierbei geht die elektrische Ladung Q auf die Elektroden über. Das Verhalten des Aktors wird durch die folgenden Gleichungen beschrieben

$$\begin{bmatrix} F \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_U & -\alpha \\ \alpha & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_z \\ U \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

mit der elektrischen Ladung $Q = DL$ auf den Elektroden, der Verschiebung $q_z = SL$, der Kraft $F = TA$ und der Spannung $U = EL$. Ferner sind $\alpha = Ad_{33}c_{E,33}/L$ und $A = \pi r^2$ die Fläche. Der Parameter $S_U = Ac_{E,33}/L$ gibt die mechanische Steifigkeit des Aktors an, d.h. das Verhältnis der Kraft F zur Verformung q_z , dies aber hängt von den elektrischen Randbedingungen ab. Weiterhin ergibt sich die elektrische Kapazität C , d.h. das Verhältnis der aufgenommenen Ladung zur wirkenden elektrischen Spannung aus (3.2) bei verhinderter Ausdehnung ($q_z = 0$); $C = Q_0/U_0 = A\epsilon_s/L$.

Die Ausdehnung q_z des Aktors hängt linear von der angelegten Betriebsspannung U sowie den auf sie einwirkenden Kräften ab. Für die Aktorik schreibt man die Gleichungen (3.2) um. So gilt für einen Leistungsverstärker, der die elektrische Spannung am Aktor regelt,

$$\begin{bmatrix} q_z \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_U & d \\ d & C_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ U \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

wobei $h_U = 1/S_U$, $d = d_{33}$ und $C_F = A\epsilon_{T,33}/L$.

Piezo-Stapelaktoren sind Vielschicht-Piezokeramiken (Multilayer Piezo Ceramics) mit Kondensatoreigenschaften. Sie sind für kleine Wege und große Kräfte ausgelegt und werden zumeist statisch oder quasistatisch elektrisch angesteuert, d.h. deutlich unterhalb ihrer niedrigsten Resonanzfrequenz, wodurch entsprechende Stellkräfte oder Stellwege erzeugt werden.

Die freie Verschiebung eines Piezo-Stapelaktors q_z mit der Grundfläche A , der Dicke der Einzelschichten L und deren Gesamtzahl n errechnet sich aus folgender Gleichung

$$q_z = n d_{33} U \quad (3.4)$$

und die Gesamtkapazität

$$C_n = \frac{n \varepsilon_r \varepsilon_0 A}{L}, \quad (3.5)$$

wobei ε_0 die elektrische Feldkonstante und ε_r die relative Permeabilität ist. Man überzeugt sich leicht, dass der wichtigste Vorteil der Vielschicht-Technik bei Aktoren die Erniedrigung der Betriebsspannung U (n mal) ist. Parallel dazu ist ein Anstieg der Kapazität zu verzeichnen, was im dynamischen Betrieb zu einer entsprechenden Erhöhung der Ladeströme führt.

Um große Auslängungsbeträge zu bewirken, werden die Aktorscheiben elektrisch parallel und mechanisch in Reihe geschaltet. Für sogenannte Piezo-Stapelaktoren mit n Keramikschichten gilt

$$\begin{bmatrix} q_z \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_a & d_n \\ d_n & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ U \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

worin h_a die mechanische Nachgiebigkeit des Aktors bei Kurzschluss der Elektroden ist. Sie errechnet sich aus

$$h_a = \frac{s_{E,33} n L}{A}. \quad (3.7)$$

Bei verhinderter Ausdehnung ($q_z = 0$) stellt sich die Klemmkraft¹ ein, wenn die elektrische Spannung U wirkt

$$F = - \frac{d_{33} A}{s_{E,33} L} U. \quad (3.8)$$

Ferner lässt sich d_n praktisch aus der Gleichung des Leerlaufhubs q_z bestimmen. Hieraus ergibt sich

$$d_n = \frac{q_z}{U}. \quad (3.9)$$

¹ Anstelle des Begriffes Klemmkraft ist auch der Ausdruck Blockierkraft gebräuchlich.

3.2 Mechanisches Ersatzmodell eines Piezoaktors

Bei Frequenzen weit unterhalb der ersten Resonanz kann das elektrische Verhalten des Aktors durch das Ersatzmodell eines Kondensators beschrieben werden, während sein mechanisches Verhalten durch eine Feder modelliert werden kann. Die Beschreibung des gekoppelten elektromechanischen Verhaltens führt dann zu dem folgenden mechanischen Ersatzmodell, in dem die mechanisch-elektrischen Analogien verwendet werden.

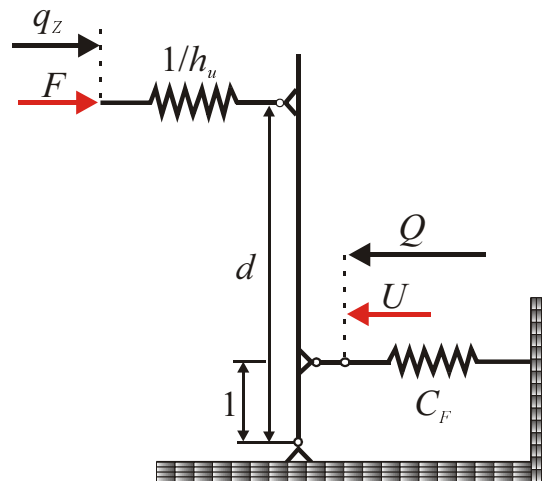


Abb. 3.2: Mechanisches Ersatzmodell eines Piezoaktors

In Abb. 3.2 repräsentiert Q den Ladungsfluss auf den Aktor und U die anliegende elektrische Spannung. Die Kapazität der Piezokeramik erscheint als äquivalente Federsteifigkeit und d ist die dimensionsbehaftete Koppelgröße, mit der mechanische und elektrische Größen ineinander umgerechnet werden. Für den Weg am Aktorende und die auf den Aktor fließende Ladung gelten die Gleichungen (3.3) und (3.6).

3.3 Aktordimensionierung

Bei der Anwendung aktiver Schwingungsdämpfung stellen sich die Fragen, ob die Leistung der Aktoren ausreichend ist und ob die notwendigen Amplituden generiert werden können.

In vorliegendem Abschnitt wird gezeigt, dass die realisierbaren Stellwege von Piezoaktoren für die aktive Dämpfung von Rotoren hinreichend sind. Weiterhin wird festgelegt, welche konkreten Anforderungen an einen Piezoaktor für die aktive Lagerabstützung zu erfüllen sind, um die unwuchterregten Resonanzschwingungen dämpfen zu können. Gesucht wird die notwendige Steifigkeit des Aktors sowie der erforderliche maximale Aktorhub. Hierzu wird ein einfaches Rotormodell, welches auf der linken Seite mit einem Piezo-Stapelaktor erweitert worden ist, herangezogen (Abb. 3.3). In diesem Modell ist die Welle masselos. Die Steifigkeit der Welle lässt sich wie ein Biegebalken errechnen. Die gesamte Masse m ist auf einen Punkt konzentriert, auf den die Kräfte wirken. Das rechte Rotorlager ist passiv. Es werden folgende Voraussetzungen und Vereinfachungen getroffen:

- Die Berechnungen werden nur für die Dämpfung der ersten Eigenfrequenz durchgeführt, womit das in Abb. 3.3 dargestellte vereinfachte mechanische System gültig ist.
- Die Gleichungen werden für den nichtrotierenden Fall, also ohne gyroscopische Effekte hergeleitet.
- Ferner möge keine passive Dämpfung vorhanden sein.
- Der Aktor selbst wird mechanisch als Feder mit der Steifigkeit S_a modelliert.
- Der Stellweg des Aktors entspricht der Fußpunktverschiebung q_o dieser Feder.
- Die elektromechanischen Beziehungen werden nicht berücksichtigt.
- Die Steifigkeiten der Wälzlager seien in der Steifigkeit der Welle enthalten und werden hier nicht explizit behandelt.

Als externe Kraft möge im gesamten Frequenzbereich die Unwuchtkraft in Resonanz ($\Omega = \omega_0$) wirken, deren Amplitude

$$F = m\varepsilon\Omega^2, \quad (3.10)$$

mit der Rotordrehfrequenz Ω , Eigenkreisfrequenz ω_0 und Exzentrizität ε ist.

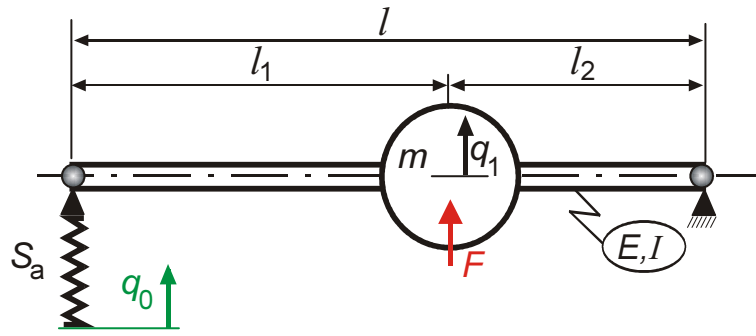


Abb. 3.3: Mechanisches Ersatzmodell vom elastischen Rotor mit aktiver Lagerabstützung

Richtet man sich nach DIN ISO 1940, kann man den Wert der zulässigen Restunwucht U_{zul} auf die Rotormasse beziehen und in Form der zulässigen spezifischen Restunwucht e_{zul} wie in folgender Gleichung beschreiben

$$e_{zul} = \frac{U_{zul}}{m} . \quad (3.11)$$

Dadurch wird die Auswucht-Gütestufe G mittels folgender Gleichung ausgedrückt,

$$e_{zul} \cdot \Omega = G . \quad (3.12)$$

Setzt man dies in (3.10) ein, erhält man

$$F = mG\Omega . \quad (3.13)$$

3.3.1 Aktorhub

Für das vorgestellte System lässt sich das dynamische Gleichgewicht der Kräfte in

$$m\ddot{q}_1 + S_w q_1 = F - S_0 q_0 \quad (3.14)$$

aufstellen. Die Steifigkeiten S_w und S_0 ergeben sich aus der Einheitsverschiebung der Freiheitsgrade q_1 und q_0 , wobei die folgenden Zusammenhänge gelten

$$S_w = \left(\frac{\lambda^2}{S_a} + \frac{1}{S_1} \right)^{-1} \quad \text{und} \quad S_0 = S_w \cdot \lambda, \quad \lambda = l_2 / l, \quad (3.15)$$

worin S_1 der Steifigkeitswert aus dem Einheitsverschiebungszustand der Rotorwelle am Punkt q_1 für unendliche Aktorsteifigkeit ist.

Es ist wohl bekannt, dass bei dem Einmassenschwinger im unterkritischen Frequenzbereich hauptsächlich die Federkräfte den äußeren Kräften

entgegenwirken, oberhalb der Resonanz sind die Massenkkräfte gegenüber den äußeren Kräften wirksam und im Falle der Resonanz die Dämpfungskräfte. Wegen fehlender passiver Dämpfung in (3.14) werden im Resonanzbereich die vom Aktor erzeugten Kräfte der äußeren Kraft das Gleichgewicht halten, d.h. die linke Seite von (3.14) ist im Resonanzbereich gleich Null und die Kraft des Aktors auf die Masse m kann mit dem zweiten Term der rechten Seite von (3.14) aktiv kompensiert werden. Dadurch bestimmt man aus $F\text{-}S_0\ q_0$ im Bereich der Resonanz den Amplitudenwert

$$q_0 = \frac{F}{S_0}, \quad (3.16)$$

was allerdings unabhängig vom erreichten aktiven Dämpfungsgrad des geregelten Systems gilt. Der notwendige Aktorhub h entspricht dem Doppelten dieses Amplitudenwertes,

$$h = 2 \cdot \frac{F}{S_0}. \quad (3.17)$$

Das Ergebnis soll für zwei Sonderfälle untersucht werden:

a) Die Masse in der Mitte des Rotors:

Wenn die vereinigte Masse in der Mitte des Rotors ($l_1 = l_2$; $\lambda = 1/2$) gelegen ist, ist die Steifigkeit der Welle geringer als die Steifigkeit des Aktors $S_1 \ll S_a$. Hiermit wird nach (3.15)

$$S_w \approx S_1 \quad \text{und} \quad S_0 \approx S_1 / 2, \quad (3.18)$$

so erfolgt der Aktorhub näherungsweise aus

$$h \approx \frac{4F}{S_1}. \quad (3.19)$$

Berechnet man die Steifigkeit aus der Eigenfrequenzgleichung $S_1 = m\omega_0^2$ für den Rotor und verwendet (3.13), ergibt sich in Resonanz

$$h = 4 \cdot \frac{m\varepsilon\Omega^2}{m\omega_0^2} = 4\varepsilon = 4 \cdot \frac{G}{\Omega}. \quad (3.20)$$

b) Die Masse nah am aktiven Lager:

Wenn aber die Masse des Rotors sehr nah am aktiven Lager ($\lambda = 1$) liegt, ist die Rotorsteifigkeit viel größer als die Aktorsteifigkeit. Hiermit ändert sich (3.15) zu

$$S_w \approx S_a \text{ und } S_0 \approx S_a,$$

woraus sich für den Aktorhub ergibt

$$h \approx \frac{2F}{S_a}. \quad (3.21)$$

Wie oben gilt auch hier die Gleichung für die Eigenfrequenz des Rotors $S_a = m\omega_0^2$. Man erhält hierdurch

$$h = 2 \cdot \frac{m\varepsilon\Omega^2}{m\omega_0^2} = 2\varepsilon = 2 \cdot \frac{G}{\Omega}. \quad (3.22)$$

Vergleicht man die beiden Fälle miteinander, so kommt man zu der Schlussfolgerung, dass das aktive Lager auf jeden Fall so nah wie möglich an der exzentrischen Masse angebracht werden sollte, um den Aktorhub zu minimieren. Die Gleichungen (3.20) und (3.22) zeigen, dass der notwendige Aktorhub relativ einfach aus der Auswucht-Gütestufe bestimmt wird, und dass die Steifigkeit und Masse der Komponenten keine Auswirkung auf den notwendigen Aktorhub hat. Dies ist auf die Beziehung zwischen Unwuchtskraft und Resonanzfrequenz zurückzuführen. Abschließend wird für eine typische Konfiguration der Aktorhub ermittelt:

Der Rotor ist mit der Auswucht-Gütestufe $G = 6,3 \text{ mm/s}$ gewuchtet, und die höchste Betriebsdrehzahl von 3000 Umdrehungen pro Minute (U/min) liegt oberhalb der ersten Resonanz. Berechnet man den Aktorhub aus (3.20) und (3.22) für beide Fälle, die zentrische bzw. am Lager angeordnete Masse, so erhält man $h \approx 80 \text{ }\mu\text{m}$ bzw. $h \approx 40 \text{ }\mu\text{m}$. Die Idealisierungen der Aktor- bzw. Wellensteifigkeit bewirken hier eine Unterabschätzung, aber marktübliche Stapelaktoren erreichen Hübe bis zu $120 \text{ }\mu\text{m}$, so dass für diese Auswucht-Gütestufe die Verwendung von Stapelaktoren durchaus möglich ist.

3.3.2 Aktordurchmesser

Nachdem der erforderliche Hub definiert ist, muss der Durchmesser und damit die Steifigkeit S_a des Aktors bestimmt werden. Ein weiteres Kriterium hierfür ist

die Lagersteifigkeit. Ist die Lagersteifigkeit des aktiv gelagerten Systems relevant, z.B. wegen großer Prozesskräfte oder kleiner einzuhaltender Spalte eines Rotorsystems, benötigt man eine erforderliche Lagersteifigkeit S_{erf} , woraus man direkt die notwendige Aktorsteifigkeit bestimmen kann

$$S_a = \left(\frac{1}{S_{erf}} - \frac{1}{S_{Lager}} \right)^{-1}, \quad (3.23)$$

mit der Steifigkeit S_{Lager} des passiven Lagers.

Ist die Lagersteifigkeit des aktiv gelagerten Systems irrelevant und spielt somit nur eine untergeordnete Rolle, wenn z.B. ausschließlich Unwuchtkräfte wirken, strebt man an, einen optimalen Aktordurchmesser zu finden. Hierfür muss man neben den rein mechanischen Größen auch die elektrischen Größen des Aktors in Betracht ziehen. Sowohl aus thermischen als auch aus Kostengründen ist es bei Piezoaktoren sinnvoll, den Stellstrom und damit auch die Verstärkerleistung so gering wie möglich zu halten. Der Stellstrom kann nach [PI \(2001\)](#) zu

$$i = \omega \cdot C \cdot U_{p-p} \quad (3.24)$$

bestimmt werden, mit der Spitze-Spitze Spannung U_{p-p} und der elektrischen Kapazität C , die nach (3.5) von der Aktorgeometrie abhängt. Da die Eigenfrequenz des Rotorsystems von der Aktorsteifigkeit abhängt und die Abschätzung in Resonanz gilt, geht die Stellfrequenz $\omega = \omega_0 = \sqrt{S_w / m}$ direkt in den Stellstrom ein.

Aus Gleichungen (3.5), (3.15), (3.17) und (3.24) kann man alle interessierenden Werte in Abhängigkeit vom Aktordurchmesser berechnen, [Ehmann et al. \(2003\)](#). Deren normierte Darstellung für den Fall $\lambda=1$ in Abb. 3.4 erlaubt folgende Interpretationen: Es gibt tatsächlich einen optimalen Aktordurchmesser d_{opt} . Den minimalen Strom benötigt man bei $d/d_{opt} = 1$, wobei die Aktorsteifigkeit einem Viertel der passiven Struktursteifigkeit S_1 entspricht. Hierbei beträgt die Gesamtsteifigkeit S_w noch ein Drittel der Steifigkeit des passiven Systems ohne Aktor.

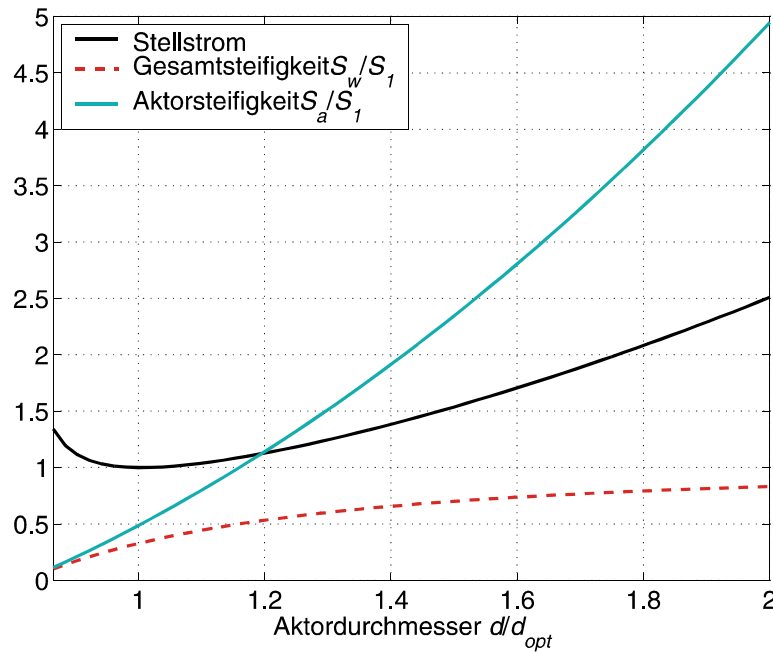


Abb. 3.4: Normierte Werte für Strom und Steifigkeit des Aktors in Abhängigkeit vom normierten Durchmesser für $\lambda = 1$, [Ehmann et al. \(2003\)](#)

Für praktische Anwendungen, bei denen die Steifigkeit des aktiven Systems sich beispielsweise nicht mehr als 20% gegenüber dem Passiven vermindern sollte, kann man erkennen, dass $S_a \approx 5S_1$ ca. das 2,5-fache des optimalen Stellstroms erfordert.

Abschließend wird abgeschätzt, welche maximalen Rotormassen aktiv gedämpft werden können. Hierzu möge die Steifigkeit des aktiven Systems 80% der des Systems ohne Aktor entsprechen, also $S_w = 0,8S_1$. Für die erste Eigenfrequenz kann über (3.14) die Masse mit $m = S_w / \omega_0^2$ berechnet werden, und umformen von (3.15) ergibt $S_w = 0,2 S_a / \lambda^2$. Mit den größten marktüblichen Aktoren (z.B. PI 247-50, 80 μm Hub, $S_a = 360 \text{ N}/\mu\text{m}$, 30 kN maximale Druckkraft) und der ersten Biegeeigenfrequenz von beispielsweise 50 Hz können Rotormassen von ca. 700 kg für $\lambda = 1$ bzw. 2800 kg für $\lambda = 0,5$ mit Piezoaktoren aktiv gedämpft werden, wobei möglicherweise Kühlmaßnahmen für den Aktor erforderlich sind.

3.4 Schlussbetrachtung

Piezelektrische Aktoren haben merklich andere Eigenschaften als Aktoren nach anderen Wirkprinzipien. Sie können wesentlich schneller sein und haben eine

größere Steifigkeit. Es wurde hier gezeigt, dass sich bei dem nachträglichen Einbau solcher Aktoren im Kraftfluss eines Systems die Eigenschaften des Systems kaum ändern, insbesondere gilt dies für die Steifigkeit. Es ist eine der herausragenden Eigenschaften der Piezoaktoren, mit hoher Auflösung verschiedene Weg-Zeit-Kurven exakt abbilden zu können. Bei der Verwendung von Piezoaktoren in der Praxis sollte durchdacht werden, welche Eigenschaften besonders berücksichtigt werden sollen, da nicht alle Eigenschaften gleichmäßig hervorgehoben sein können.

4 Regelungsverfahren für die aktive Lagerung

Dieses Kapitel widmet sich der Reglerauslegung zur aktiven Dämpfung der Rotorschwingungen mit Hilfe einer aktiven Lagerabstützung. Für die aktive Schwingungsdämpfung werden sowohl Steuerungs- als auch Regelungskonzepte verwendet. Steuerungskonzepte sind geeignet zur Verbesserung des dynamischen Systemverhaltens im Hinblick auf bekannte oder messbare Störungen. Beispielsweise können Resonanzen, die durch Unwuchten erregt werden und von der Drehzahl abhängig sind, durch drehzahlgesteuerte Variation der Lagersteifigkeiten verschoben werden, so dass die Erregerfrequenz der Unwuchtkraft nicht mit den Eigenfrequenzen des Rotorsystems zusammenfällt. Für weitere Beispiele zur Unwuchtskompensation und aktiven Auswuchtung eines Rotors ist das Werk von [Zhang \(2003\)](#) erwähnenswert.

Bei der aktiven Schwingungsdämpfung wird eine Regelung in den meisten Fällen der Steuerung vorgezogen. Die auf Regelung basierte Schwingungsdämpfung hat gegenüber den Steuerungskonzepten gewichtige Vorteile. Einige dieser Vorteile sind, instabile Systeme stabilisieren zu können und das Störverhalten auch für unbekannte Störungen deutlich zu verbessern. Die aktive Dämpfung mit Reglerkonzepten erfolgt durch die Verwendung von Sensoren und Aktoren, die durch Rückkopplung in einem geschlossenen Regelkreis über einen Regler miteinander verbunden sind. In diesem Fall nutzt man die Rückkopplung, um die Auswirkungen von breitbandigen Störungen innerhalb eines Regelungssystems zu vermindern. Unter Umständen können aktive Dämpfungssysteme preiswerter oder einfacher als passive Strukturen mit

vergleichbarer Leistungscharakteristik sein oder sie können Leistungen, die durch keine passive Struktur erbracht werden können, liefern. Ein maßgeblicher Vorteil der aktiven Schwingungsdämpfung gegenüber passiven Dämpfungsmechanismen ist, dass Messungen an jeder Stelle des Rotorsystems vorgenommen werden können, insbesondere an denjenigen Stellen, die die größten Schwingungsamplituden aufweisen, während der Stelleingriff z.B. über das Lager erfolgt. Dies ist erheblich, da somit an den schwer zugänglichen, aber relevanten Stellen des Rotorsystems lediglich Sensoren angebracht werden können, anstatt einen kompletten Dämpfungsmechanismus einzubauen. Durch eine Rückführung der Messsignale ergibt sich eine Kopplung zwischen dem aktiven Lager und dem Messort. Durch ungeschickte Regelstrategien besteht aber wegen dieser Rückkopplung die Gefahr, die Schwingungen anzuregen und somit eine Instabilität des Regelkreises zu verursachen. Es sind hierfür jedoch Stabilitätsuntersuchungen erforderlich, um z.B. Spillover-Effekte zu verhindern, [Söffker \(1997\)](#).

In diesem Kapitel werden die Regelkonzepte vorgeschlagen, die besonders für eine aktive Lagerung elastischer Rotoren geeignet sind. Der Schwerpunkt liegt hierbei darauf, ein praktisches, systematisches und robustes Verfahren zu entwickeln. Es handelt sich um Methoden, die eine Stabilität des geschlossenen Regelkreises unter Einhaltung der Regelgüte garantieren.

Für eine bestimmte Konfiguration der Aktoren und Sensoren, d.h. physikalisch am gleichen Platz angeordnete Aktor-Sensor-Paare, wird eine Reihe von Regelungsmethoden beschrieben, die die Stabilität des Regelkreises gewährleisten. Neben dem formalistischen, auf dem physikalischen Modell basierenden Entwurfsverfahren der robusten Reglersynthese wird hier auf diese Methoden eingegangen.

Bei der Entwicklung der Regelkonzepte spielen die Beobachtbarkeit und die Steuerbarkeit des Systems eine wichtige Rolle, was von der Art der verfügbaren Aktoren und Sensoren sowie deren Positionierung abhängt. Die Reglerauslegung erfolgt in drei Phasen:

- Bestimmung der Regelziele
- Auswahl der Aktoren und Sensoren
- Festlegung der Reglerstruktur und Berechnung der Reglerparameter

Auf die Grundlagen der Regelungstheorie wird im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen. Dazu sei auf zahlreiche Literaturstellen verwiesen, z.B. [Nordmann \(2001\)](#), [Isermann \(2002\)](#) und [Ludyk \(1995\)](#).

4.1 Regelziele

Zur Auswahl und Realisierung eines Regelkonzeptes müssen zunächst die Regelziele genau definiert werden. Die Zielsetzungen können nach den unterschiedlichen Anforderungen und Problemstellungen sehr verschieden sein. Dies bestimmt maßgeblich den konstruktiv zu betreibenden Aufwand. Im Folgenden sind einige wesentliche Regelziele für die Schwingungsdämpfung eines Rotorsystems angeführt:

- Das Betriebsverhalten des Gesamtsystems einschließlich des Rotorsystems und des Stellgliedes muss stabil sein,
- unter allen Betriebsumständen sollten die Verformungen des Rotors möglichst gering gehalten werden,
- die Resonanzamplituden sollten größtmöglich reduziert werden, um die Lebensdauer zu verlängern und die Ausfallzeiten zu verringern,
- die Belastung des Lagers sollte möglichst gering bleiben und
- die Stabilität und Störverhalten sollten robust gegenüber Parameterschwankungen sein.

Das letztgenannte Regelziel erklärt einen gegen Modellunsicherheiten robusten Regler derart zu entwerfen, der bei Abweichungen der Regelstrecken von Modell oder bei Schwankungen realer Parameter auch einen stabilen Regelkreis mit ausreichender Regelgüte realisieren kann.

Diese Zielsetzung ist ebenfalls ein wesentliches Kriterium für die Auswahl und Positionierung der Messaufnehmer (Sensoren).

4.2 Kollokation von Sensor und Aktor

Die Verwendung von kollokierten Aktoren und Sensoren, d.h. physikalisch am gleichen Ort platzierten Aktor-Sensor-Paaren, führt zu abwechselnden konjugiert komplexen Polen und Nullstellen auf der imaginären Achse eines Pol-Nullstellen-Diagramms, wenn die Struktur ungedämpft ist, oder etwas in der linken Halbebene, wenn die Struktur einen geringen Dämpfungsgrad aufweist. Anhand dieser Eigenschaft wurde eine Anzahl von aktiven Dämpfungsverfahren mit theoretisch garantierter Stabilität entwickelt und in der Praxis erfolgreich geprüft. Sie können dezentral implementiert werden, wenn jeder Aktor nur auf den kollokierten Sensor einwirkt. In diesem Fall besteht das Regelsystem aus unabhängigen SISO¹-Kreisen, deren Stabilität und Dämpfungsgrad aus der Wurzelortskurve direkt bestimmt werden kann.

Es ist darauf hinzuweisen, dass die Garantie der Stabilität keine Aussage zur Regelgüte des geschlossenen Regelkreises beinhaltet. Eine hohe Regelgüte erfordert eine korrekte Festlegung der Größen des Aktors und des Sensors und deren geeignete Platzierung, um eine gute Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit zu erzielen. In diesem Abschnitt werden stabile, lokale Regler für verschiedene Arten von kollokierten Aktor-Sensor-Paaren beschrieben. Jedes einzelne Verfahren wird für das Rotormodell aus Kapitel 2 verwendet und die entsprechenden Ergebnisse dargelegt. Dieser Abschnitt gründet sich in wesentlichen Punkten auf [Preumont \(2002\)](#).

4.2.1 Modellbildung der kollokierten Systeme mit modaler Beschreibung

Die allgemeine Form der Bewegungsgleichung für das dynamische Gleichgewicht zwischen den externen Trägheits- und Dämpfungskräften in einer

¹ Single Input Single Output

Struktur mit konzentrierten Parametern und mit der begrenzten Anzahl von Freiheitsgraden lautet (vgl. Kapitel 2, Gleichung (2.39))

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\mathbf{q} = \mathbf{h}, \quad (4.1)$$

mit dem verallgemeinerten Verschiebungsvektor \mathbf{q} (Verschiebung und Drehung) mit f physikalischen Freiheitsgraden und den Matrizen für die Massen, Dämpfungseffekte und Steifigkeiten an diesen Koordinaten, \mathbf{M} , \mathbf{D} und \mathbf{S} sowie dem Vektor der Kräfte \mathbf{h} . Hier wird der gyroskopische Effekt nicht mitberücksichtigt. \mathbf{M} und \mathbf{S} entstehen aus der Diskretisierung der Struktur mit begrenzten Elementen. Die Dämpfungsmatrix \mathbf{D} generiert sich durch verschiedene Dissipationsmechanismen in der Struktur und ist sehr schwer zu berechnen. Eine Alternative hierzu ist die übliche Hypothese der modalen Dämpfung von [RAYLEIGH](#) für Strukturen mit geringer Dämpfung

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{S}, \quad (4.2)$$

wobei α , β aus der Struktur ermittelt werden können.

Mit Hilfe der ungedämpften Eigenvektoren φ_i kann die Bewegungsgleichung entkoppelt werden. Dazu werden die physikalischen Koordinaten \mathbf{q} mit der Modalmatrix Φ auf das modale Koordinatensystem \mathbf{p} transformiert.

$$\mathbf{q} = \Phi \mathbf{p} \quad (4.3)$$

Aus den spaltenweise zusammengefassten Eigenformen ergibt sich die Modalmatrix $\Phi = [\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_f]$. Durch Einsetzen von (4.3) in (4.1) erhält man

$$\mathbf{M}\Phi \ddot{\mathbf{p}} + \mathbf{D}\Phi \dot{\mathbf{p}} + \mathbf{S}\Phi \mathbf{p} = \mathbf{h}. \quad (4.4)$$

Mit der Multiplikation von Φ^T von links und der Nutzung der Orthogonalitätseigenschaften der Eigenformen erreicht man

$$\text{diag}(m_i) \ddot{\mathbf{p}} + \text{diag}(2\xi_i m_i \omega_i) \dot{\mathbf{p}} + \text{diag}(m_i \omega_i^2) \mathbf{p} = \Phi^T \mathbf{h}, \quad (4.5)$$

worin m_i die modalen Massen und ω_i die Eigenkreisfrequenzen sind. Aus der [RAYLEIGH](#)-Dämpfung (4.2) folgt

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta \omega_i \right). \quad (4.6)$$

Die stationäre Antwort infolge harmonischer Erregung, $\mathbf{h} = \mathbf{F} e^{j\omega t}$ ist eine harmonische Schwingung mit der gleichen Frequenz des Erregers, $q = \mathbf{Q} e^{j\omega t}$. Setzt man sie in (4.1) ein, erhält man die dynamische Nachgiebigkeit des Systems, mit anderen Worten die Übertragungsfunktion $G(\omega)$,

$$\mathbf{Q} = \left[-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{D} + \mathbf{S} \right]^{-1} \mathbf{F} = G(\omega) \mathbf{F}. \quad (4.7)$$

Wenn man das gleiche Problem in modalen Koordinaten betrachtet, ist die modale Amplitude auch harmonisch, $p = \mathbf{P} e^{j\omega t}$. Durch Einsetzen in (4.5) ergibt sich

$$\mathbf{P} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{m_i (\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\xi_i \omega_i \omega)} \right\} \Phi^T \mathbf{F}. \quad (4.8)$$

Dies führt mit (4.3) zur modalen dynamischen Nachgiebigkeit

$$G_{lk}(\omega) = \sum_{i=1}^f \frac{\varphi_i(l) \varphi_i^T(k)}{m_i (\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\xi_i \omega_i \omega)}. \quad (4.9)$$

$G_{lk}(\omega)$ drückt die komplexe Amplitude der strukturellen Antwort des Freiheitsgrades l aus, wenn die Struktur einer harmonischen Erregung am Freiheitsgrad k ausgesetzt wird. Wenn die Struktur keine Starrkörpereigenform hat, kann man aus (4.9) mit $\omega = 0$ die statische Nachgiebigkeit ermitteln

$$G_{lk}(\omega = 0) = \sum_{i=1}^f \frac{\varphi_i(l) \varphi_i^T(k)}{m_i \omega_i^2} = \Phi (\Phi^T \mathbf{S} \Phi)^{-1} \Phi^T. \quad (4.10)$$

Um die Übertragungsfunktion eines kollozierten Systems zu bestimmen und ihre Eigenschaften näher definieren zu können, betrachtet man die diagonale dynamische Nachgiebigkeitsmatrix eines ungedämpften Systems, wenn die Kraft bzw. das Moment durch einen Aktor erzeugt wird und die Verschiebung bzw. Geschwindigkeit oder Beschleunigung des entsprechenden Freiheitsgrades durch einen Sensor gemessen wird, also Aktor und Sensor kolloziert sind. Es wird später verdeutlicht, dass die Regler, die für kollozierte Aktor-Sensor-Paare verwendet werden, meist spezielle Eigenschaften aufweisen, die sich als Konsequenz der wechselnden Pole und Nullstellen entlang der imaginären Achse ergeben. Aus (4.9) ergibt sich

$$G_{kk}(\omega) = \sum_{i=1}^f \frac{\varphi_i^2(k)}{m_i(\omega_i^2 - \omega^2)}. \quad (4.11)$$

$G_{kk}(\omega)$ ist real, da das System ohne Dämpfung ist und ebenfalls alle Zähler in der modalen Darstellung positiv sind. Infolgedessen kann gezeigt werden, dass

$$\frac{dG_{kk}(\omega)}{d\omega^2} \geq 0. \quad (4.12)$$

Aus (4.11) entnimmt man, dass die Amplitude der Übertragungsfunktion an den Resonanzen ω_i gegen $\pm\infty$ geht (entsprechend einem Paar rein imaginärer Pole im System). In jedem Abstand zwischen den aufeinander folgenden Resonanzfrequenzen gibt es eine Frequenz ω_{0j} , bei der die Amplitude der Übertragungsfunktion auf Null zurückgeht. In der Dynamik werden diese Frequenzen Antiresonanz genannt. Sie entsprechen lediglich den Nullstellen des offenen Regelkreises $G_{kk}(\omega)$. Eine harmonische Erregung mit einer Antiresonanz produziert keine Antwort am Freiheitsgrad, in dem die Erregung angebracht wird. Die Struktur verhält sich so, als ob ein zusätzliches steifes Lager an diesem Punkt angebracht worden wäre. Energien, die mit den Frequenzen der Nullstellen in das System eingebracht werden, werden von Subsystemen des Gesamtsystems aufgenommen, so dass keine Bewegung mit dem Sensor gemessen werden kann. Nullstellen sind somit die Resonanzen von Subsystemen, [Nordmann \(2001\) Seite 171](#). Im Gegensatz zu den Resonanzstellen hängen die Antiresonanzen von der Aktor- bzw. Sensorposition ab. Platziert man das Aktor-Sensor-Paar an einem anderen Freiheitsgrad, dann ändern sich die Frequenzen der Nullstellen. In allen Fällen gibt es jedoch immer nur eine einzige Antiresonanz zwischen zwei benachbarten Resonanzen. Wenn eine geringe Dämpfung im System vorhanden ist, werden die Pole und die Nullstellen etwas in die linke Halbebene der Wurzelortskurve verschoben, ohne Veränderung der signifikanten Eigenschaft des Systems mit abwechselnden Polen und Nullstellen.

4.2.2 Direkte Geschwindigkeitsrückführung

Die Dämpfung verringert die Amplitude der Übertragungsfunktion in der Nähe der Resonanzen und erreicht infolgedessen ein stabiles Verhalten gegenüber breitbandigen Störungen. Eine gängige Methode zur Erhöhung der viskosen Dämpfung ist die proportionale Geschwindigkeitsrückführung. Die

Geschwindigkeiten \dot{y} werden im System gemessen und hieraus werden die Stellkräfte u bestimmt. Die direkte Geschwindigkeitsrückführung ist im Allgemeinen für die Kraftaktoren geeignet. Der geregelte Aktor verhält sich wie ein viskoser Dämpfer. u und \dot{y} sind energetisch konjugiert, d.h. ihr Produkt hat die Einheit der Leistung. Hier wird die Dissipation durch eine direkte negativ proportionale Rückführung von \dot{y} erzielt, welche zu einer robusten Stabilität des geschlossenen Regelkreises mit einer robusten Regelgüte für einen vom System abhängigen Bereich von Parameterschwankungen führt. Die Gleichungen zum Regelkonzept lauten:

$$M\ddot{q} + D\dot{q} + Sq = f + Bu \quad (4.13)$$

$$\dot{y} = B^T \dot{q} \quad (4.14)$$

$$u = -K\dot{y} \quad (4.15)$$

Die Gleichung (4.13) entspricht der Bewegungsgleichung des Rotorsystems (2.58) aus Kapitel 2, wobei f ($n \times 1$) die Störkräfte und u ($m \times 1$) die Stellgrößen sind, die durch die Einflussmatrix B ($n \times m$) mit dem System verbunden werden. Die schwache Dämpfung der Struktur könnte vernachlässigt werden. Die Gleichung (4.14) ist die Ausgangsgleichung, die die Geschwindigkeitsgrößen aus der Zeitableitung der Freiheitsgrade (Verschiebung und Drehung) der Struktur bezieht. Auf Grund der Kollokation tritt Matrix B in (4.14) wieder auf. Die Regelungsgleichung (4.15) wird so gewählt, dass K positiv definit ist. Dies garantiert eine Dissipation der Energie, weil immer $u^T \dot{y} \leq 0$. Wenn K diagonal ist, wird der Regler dezentralisiert, weil jeder Aktor nur auf seinen kollokierten Sensor reagiert. Setzt man (4.14) und (4.15) in (4.13) ein, so erhält man

$$M\ddot{q} + (D + BKB^T)\dot{q} + Sq = f. \quad (4.16)$$

Hieraus ist leicht zu erkennen, dass die Regelungskräfte als viskose Dämpfung auftreten. Die Dämpfungsmatrix $C = BKB^T$ ist positiv semi-definit, weil die Aktoren und die Sensoren kollokiert sind. Die Geschwindigkeiten, in deren $B^T \dot{q} = 0$ sind, bleiben aktiv ungedämpft; solche Bereiche haben Nullstellen (Knoten) an den Sensor-Positionen. Der Nachgiebigkeitsfrequenzgang des geschlossenen Regelkreises für das Rotor-Beispiel in Kapitel 2 ist in Abb. 4.1

links dargestellt, wobei der maximale Dämpfungsgrad für die erste Eigenform eingestellt worden ist.

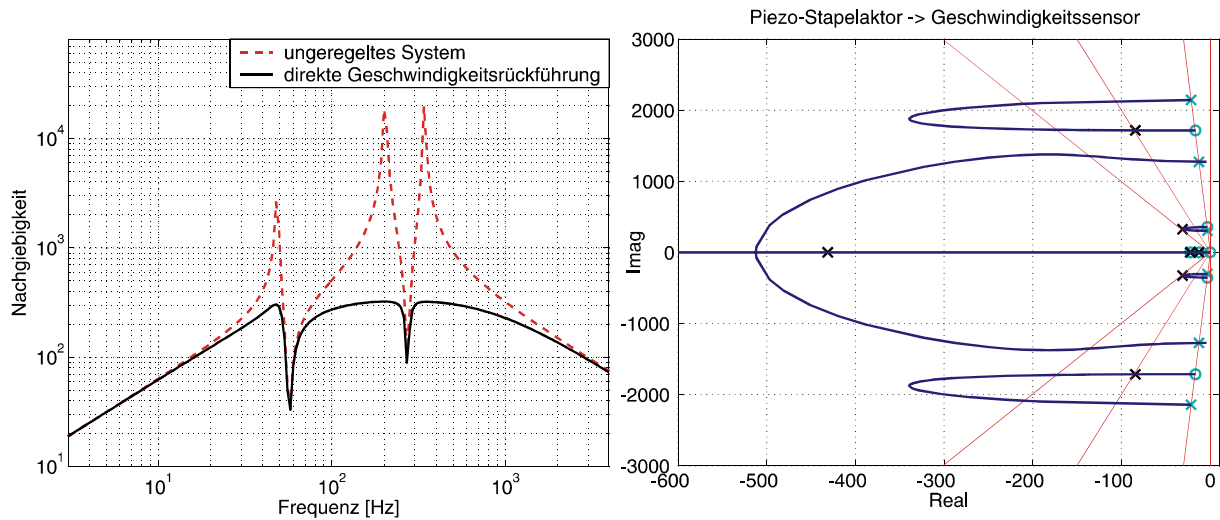


Abb. 4.1: Links: Der Nachgiebigkeitsfrequenzgang des geschlossenen Regelkreises; rechts: Die Wurzelortskurve bei maximalem Dämpfungsgrad der ersten Eigenform

Bei der direkten Geschwindigkeitsrückführung ist die aktive Dämpfung begrenzt und der Dämpfungsgrad einer jeden Eigenform hat einen maximalen Wert, womit die maximale Dämpfung erreicht wird. Man kann nicht die maximale Dämpfung aller Eigenformen gleichzeitig erreichen. Dies wird in Abb. 4.1 rechts durch die Wurzelortskurve des offenen Regelkreises gezeigt. In diesem Fall ist der maximale Dämpfungsgrad für die erste Eigenmode erreicht worden, wobei die dritte Eigenmode ein noch sehr hohes Potential zur Dämpfung hat.

Mit der Annahme, dass die Moden weit genug auseinander liegen, kann man zeigen, dass bei kleiner Verstärkung g der Dämpfungsgrad des geschlossenen Regelkreises wie folgt zu berechnen ist

$$\xi_i = g \frac{(b^T \varphi_i)^2}{2\omega_i^2}, \quad (4.17)$$

worin b der Einflussvektor ist und die Eigenmoden so normiert sind, dass $m_i = 1$. Die unterschiedlichen Dämpfungsgrade der Eigenformen sind durch die Übertragungsfunktion, z.B. zwischen den Unwuchtkräften und der Verschiebung an einem relevanten Ort der Struktur besser zu beobachten. In Abb. 4.2 sieht man, dass beim Erreichen des maximalen Dämpfungsgrades der ersten

Eigenmode die Dämpfung der dritten Eigenmode sich kaum verbessert. Erhöht man den Dämpfungsgrad der dritten Eigenform, vermindert sich der maximal erreichbare Dämpfungsgrad der ersten Eigenform.

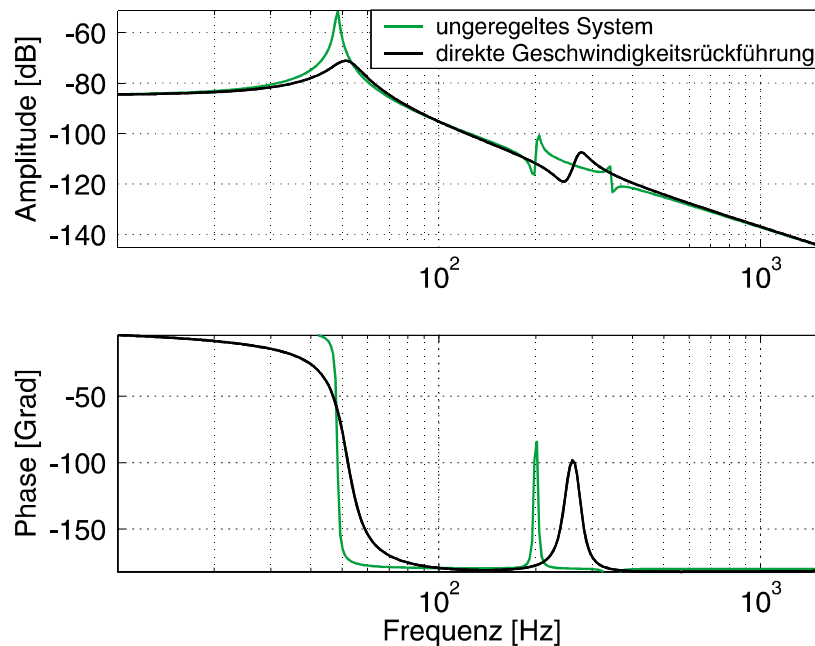


Abb. 4.2: Der Einfluss der Unwucht auf die Mitte der Welle mit und ohne Regler

4.2.3 Geschwindigkeitsrückführung mit Tiefpassfilter

Meistens wird zur Verwendung der direkten Geschwindigkeitsrückführung die Differenzierung des gemessenen Relativweges verwendet. Diese Methode neigt dazu, hochfrequente Störungen und Geräusche zu verstärken. Aus diesem Grund ist dem Regler ein Tiefpassfilter hinzuzufügen. Für ein SISO-System führt dies zu

$$C(s) = g \frac{s}{s + \omega_c}, \quad (4.18)$$

wobei die Verschiebung am Ausgang gemessen wird. Durch diese Gleichung wird ein Pol dem System hinzugefügt, welcher weit entfernt vom Ursprung liegt. In Abb. 4.3 sind zwei Wurzelortskurven für zwei verschiedene Werte der Eckfrequenz ω_c des Tiefpassfilters dargestellt.

Die Ortskurven der Pole des geschlossenen Regelkreises beginnen an den Polen des offenen Regelkreises und gehen zu den Nullstellen des offenen Regelkreises. Sie bleiben völlig in der linken Halbebene. Da zwei Pole mehr als Nullstellen

vorhanden sind, gehen zwei Trajektorien asymptotisch mit $\pm 90^\circ$ gegen unendlich.

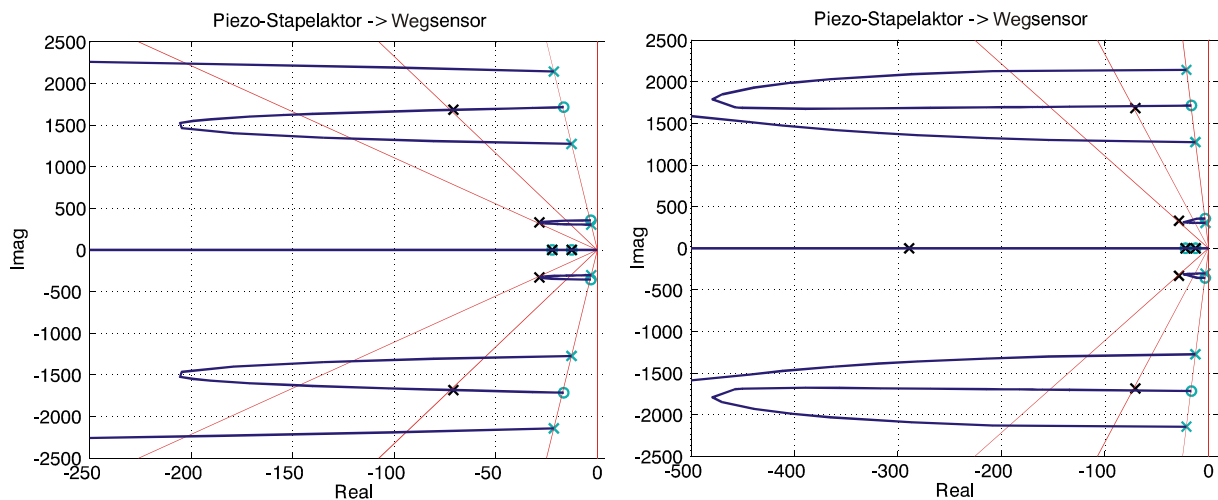


Abb. 4.3: Wurzelortskurve für zwei verschiedene Eckfrequenzen; links $\omega_c = -300$ und rechts $\omega_c = -1250$

Im Vergleich zur direkten Geschwindigkeitsrückführung ist die Dämpfung hier beeinträchtigt und der maximale Dämpfungsgrad geringer. Man erreicht mit dem Tiefpassfilter den maximalen Dämpfungsgrad, wenn $\omega_c \rightarrow \infty$, was der direkten Geschwindigkeitsrückführung entspricht. Wie Abb. 4.3 zu entnehmen ist, gehen bei niedrigem ω_c die dritten Eigenfrequenzen asymptotisch mit $\pm 90^\circ$ gegen unendlich und bei höherem ω_c die zweiten Eigenfrequenzen. Je größer ω_c wird, desto weniger ändert sich der Dämpfungsgrad. Das System ist immer stabil und diese Eigenschaft ist gegenüber Parametervariationen unempfindlich, weil das bereits erwähnte abwechselnde Muster der Pole und Nullstellen des offenen Regelkreises bei Parametervariationen erhalten bleibt.

Beim Ansteigen des Verstärkungsfaktors g gegen unendlich erreichen die Pole des geschlossenen Regelkreises die Nullstellen des offenen Regelkreises. Wie bereits erwähnt wurde, sind die Nullstellen des offenen Regelkreises Antiresonanzen. Dies führt dazu, dass durch eine harmonische Erregung mit der Frequenz der Antiresonanz keine Verschiebung an der Aktorposition erzeugt werden kann. Diese Frequenz ist identisch mit den Eigenfrequenzen eines geänderten Systems, in das ein passives Lager mit unendlicher Steifigkeit eingebaut wäre. Wenn man die Verstärkung g von Null an erhöht, bringt der

Regler nach und nach Dämpfung in die Struktur. Ab einem gewissen Betrag von g lässt die Dämpfung wieder nach und es wandern die Pole zu den Nullstellen. Genau an diesem Punkt wird der maximale Dämpfungsgrad erreicht, d.h. die optimale Verstärkung. Mit einer weiteren Erhöhung der Verstärkung verringert sich die Dämpfung und verschwindet schließlich, wenn $g \rightarrow \infty$. In der Tat regt der Regler die Struktur mit einer Antiresonanz an und infolgedessen bleibt die Aktorposition einem Knoten entsprechend fest, was durch den Regler erzwungen wird. In diesem Fall entspricht die Regelung einem festen Lager.

Die sehr schwach gedämpften Eigenmoden, die nicht vom Eingang her steuerbar sind, können wahrscheinlich durch jegliche Störung f (an anderen Stellen) angeregt werden. Ein hoher Dämpfungsgrad kann erst dann erzielt werden, wenn nur die Trajektorien der Ortskurve, die von den Polen zu den Nullstellen gehen, in der linken Halbebene weit auseinander liegen. Es gibt ebenfalls weitere Implementierungen der direkten Geschwindigkeitsrückführung mit und ohne Tiefpassfilter in [Preumont \(2002\)](#).

4.2.4 Beschleunigungsrückführung

Bei der Ausrüstung des Lagers mit Piezo-Stapelaktoren bleibt die erzeugte Verschiebung sehr gering, was zu einer Ungenauigkeit der Messung durch Wegsensoren führen kann. Besonders bei einer steifen Struktur ist die Beschleunigung häufig leichter zu messen als die Verschiebung oder die Geschwindigkeit. In solchen Fällen sind Beschleunigungssensoren sehr hilfreich. Für den Fall einer Beschleunigungsmessung am Ausgang werden in diesem Abschnitt einige Methoden erläutert.

4.2.4.1 Integration der Beschleunigung zur Rückkopplung

Die einfachste Anwendung der Beschleunigungsrückführung ist die Methode der Integration, bei der die Geschwindigkeit ermittelt wird und somit die direkte Geschwindigkeitsrückführung durchgeführt werden kann. Dies wird erfüllt durch

$$C(s) = \frac{g}{s}. \quad (4.19)$$

Durch die Integration der Beschleunigung verringert sich außerdem der Einfluss des Störsignales. Die Stabilitätseigenschaften dieses Reglers sind bereits im vorangehenden Abschnitt diskutiert worden.

In der Praxis benutzt man jedoch piezoelektrische Beschleunigungssensoren mit Ladungsverstärkern (Charge Amplifier), die sich als Hochpassfilter verhalten, [Preumont \(2002\)](#). Diese Eigenschaft beeinflusst die Resultate kaum, wenn die Eckfrequenz des Ladungsverstärkers weit genug unterhalb der Eigenfrequenz der Struktur liegt.

Im folgenden Abschnitt werden Regler präsentiert, die ein Filter zweiter Ordnung miteinbeziehen. Dieses Konzept garantiert Stabilität und erreicht gleichzeitig ein größeres Roll-Off im Hochfrequenzbereich. Der Abschnitt gliedert sich in drei Schritte: Als Erstes wird ein Schwinger mit einem einzigen Freiheitsgrad betrachtet; dann werden die Resultate auf SISO-Systeme mit vielen Freiheitsgraden erweitert und schließlich auf MIMO¹-Systeme mit sogenannter zentraler Regelung übertragen.

4.2.4.2 Regler zweiter Ordnung für Einmassenschwinger

Die Grundidee ist, das Beschleunigungssignal durch ein Filter zweiter Ordnung mit einer erheblichen Dämpfung hindurch zu schicken und am Ausgang ein zur Kraft proportionales Signal zu erzeugen. Für einen einzigen Einmassenschwinger sind die Gleichungen des Systems und des Reglers wie folgt:

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_n\dot{q} + \omega_n^2q = u \quad (4.20)$$

$$\ddot{v} + 2\xi_f\omega_f\dot{v} + \omega_f^2v = \ddot{q} \quad (4.21)$$

$$u = -gv \quad (4.22)$$

Die Stellgröße u (mit der Einheit Kraft pro Masse) ergibt sich als Produkt eines skalaren Verstärkers g (mit der Einheit der quadratischen Eigenfrequenz) und des Ausgangs eines Filters zweiter Ordnung v mit den Parametern (ξ_f, ω_f) , welcher durch die Beschleunigung \ddot{q} der Struktur angeregt wird. Obschon die Reglergleichung (4.21) durch einen Computer gelöst wird und keinem

¹ Multi Input Multi Output

physikalischen System entspricht, kann v als die relative Verschiebung eines Einmassenschwingers mit den Eigenschaften (ξ_f, ω_f) interpretiert werden.

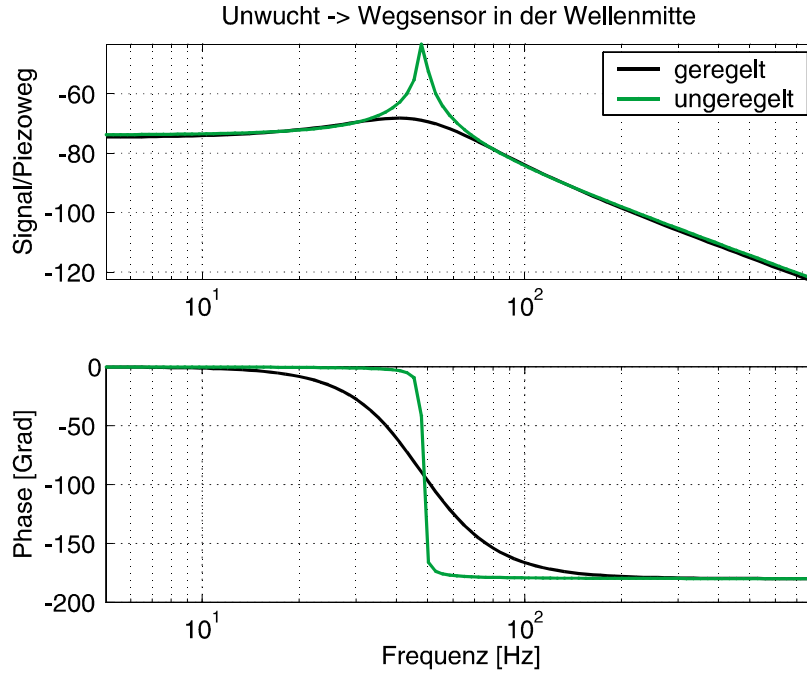


Abb. 4.4: Übertragungsfunktion des geregelten und ungeregelten Rotors als Einfreiheitsgrad-Schwinger

Das Konzept ist schon für ein Rotorsystem verwendbar, dessen erste Eigenfrequenz weit unterhalb der anderen Eigenfrequenzen liegt, z.B. die Läufermasse ist sehr groß und liegt symmetrisch auf einer schmalen Welle. Modelliert man das Rotorsystem in einer Ebene als Einmassenschwinger, [Nordmann \(2001\) Seite 121](#), und verwendet man das obengenannte Konzept, so erreicht man das geregelte System, wie es in Abb. 4.4 veranschaulicht ist. Aus der charakteristischen Gleichung des geschlossenen Regelkreises

$$1 + C(s)G_0(s) = 0$$

$$(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)(s^2 + 2\xi_f\omega_f s + \omega_f^2) + gs^2 = 0 \quad (4.23)$$

kann durch das [ROUTH HURWITZ](#)-Kriterium bewiesen werden, dass für $g > 0$ das geschlossene Regelsystem immer stabil ist [Preumont \(2002\)](#). Die typischen Wurzelortskurven eines solchen offenen Regelkreises sind in Abb. 4.5 für zwei Fälle, wo $\omega_n > \omega_f$ und $\omega_n < \omega_f$ ist, wiedergegeben.

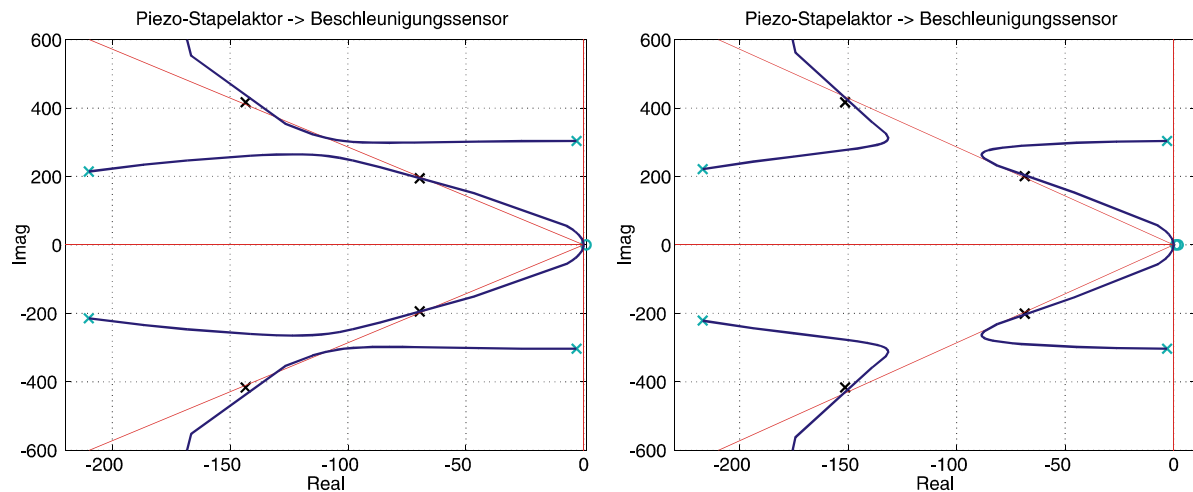


Abb. 4.5: Typische Wurzelortskurven des geregelten Systems mit Beschleunigungsrückführung wenn $\xi = 0$, links $\omega_n > \omega_f$, $\xi_f = 0,7$ und rechts $\omega_n < \omega_f$, $\xi_f = 0,7$

4.2.4.3 Regler zweiter Ordnung für SISO-Systeme mit mehreren Eigenmoden

Die Gleichung des Reglers ist im Laplacebereich

$$C(s) = \frac{g}{s^2 + 2\xi_f \omega_f s + \omega_f^2}. \quad (4.24)$$

Der Effekt des Reglers auf ein SISO-System mit vielen Eigenmoden kann durch die Wurzelortskurven des geregeltes Systems in Abb. 4.6 für zwei Werte von ω_f untersucht werden; in beiden Fällen ist $\xi_f = 0,6$ vorgegeben. In Abb. 4.6 links wird die Eigenfrequenz des Reglers ω_f nahe der ersten Eigenmode gewählt, während in Abb. 4.6 rechts die Eigenfrequenz ω_f nah zur zweiten Eigenmode liegt.

Beim Vergleich der Abbildungen erkennt man, dass alle Eigenmoden deutlich gedämpft sind, aber die Eigenmode mit der Eigenfrequenz nah zu ω_f jedoch viel stärker gedämpft wird. So kann die Regelgüte durch Einstellen des Reglers auf die Eigenmoden, die gedämpft werden sollten, optimiert werden. Dieser Aspekt kann aber bei Parametervariationen des Systems problematisch werden.

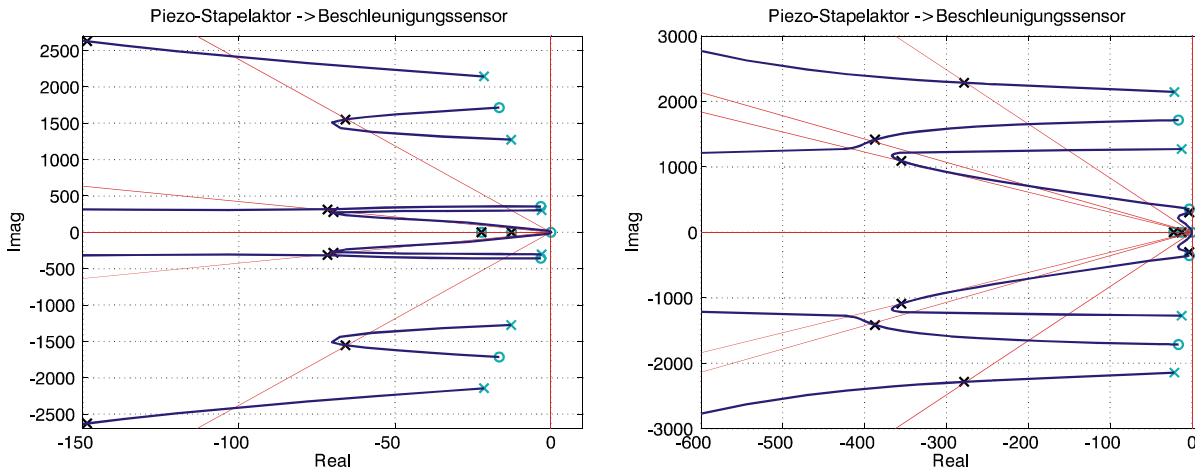


Abb. 4.6: Wurzelortskurve des SISO-Systems mit verschiedenen Reglereigenfrequenzen

Der maximal erreichbare Dämpfungsgrad erhöht sich mit ξ_f des Reglers. Für ξ_f wird ein Wert zwischen 0,5 und 0,7 empfohlen, um eine robuste Regelung und eine gute Regelgüte zu erreichen. Für die Bereiche nahe der Eigenmoden wird immer noch Stabilität garantiert, aber ein großer Dämpfungsgrad kann nicht immer für mehrere Eigenmoden gleichzeitig erzielt werden; außerdem können kleine Veränderungen der Eigenfrequenz des Reglers die Wurzelortskurven und die modale Dämpfung erheblich ändern. Um mehrere ausgewählte Eigenmoden gleichzeitig dämpfen zu können, erweitert sich dieses Verfahren durch Parallelschaltung von (4.24) für l Regler

$$C(s) = \sum_{i=1}^l \frac{g_i}{s^2 + 2\xi_{fi}\omega_{fi}s + \omega_{fi}^2}, \quad (4.25)$$

wobei die Eigenfrequenzen der Regler ω_{fi} für gezielte Eigenmode bestimmt werden müssen. Der Verstärkungsfaktor g_i muss empirisch ermittelt werden. Zur Festlegung des Verstärkungsfaktors ist es am einfachsten, mit dem Einstellen des PT_2 -Gliedes der höheren Frequenz zu beginnen, da das Roll-Off des Filters zweiter Ordnung den Einfluss des Filters auf die Frequenzen oberhalb ω_{fi} verringert. Hier wurde versucht, für die erste und dritte Eigenmode den Reglerentwurf durchzuführen. Die Resultate hieraus sind in Abb. 4.7 veranschaulicht.

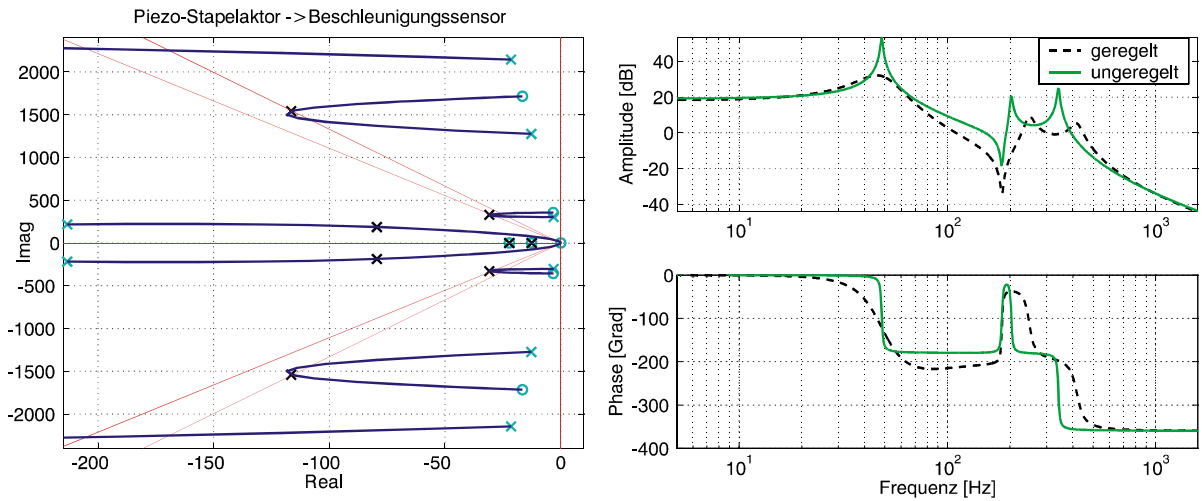


Abb. 4.7: Parallel geschaltete Regler zweiter Ordnung

Verglichen mit der direkten Geschwindigkeitsrückführung (4.19) hat dieser Regler ein größeres Roll-Off im hochfrequenten Bereich (40 dB/decade anstelle von 20 dB/decade), was die Gefahr einer Instabilisierung der hochfrequenten Eigenmoden (Spillover-Effekt) verringert. Mit diesem Vorteil kann man auch bei fehlender Kollokation unter gewissen Bedingungen für einen geschlossenen Regelkreis die Stabilität mit relativ gutem Dämpfungsgrad erreichen. Ist die Abstimmung einer gezielten Eigenfrequenz ω_{fi} gefordert, dann kann es zu einer Beeinträchtigung der Regelgüte führen, wenn diese Eigenfrequenzen nicht genau bekannt oder veränderlich sind.

In den vorangegangenen Diskussionen wurde immer davon ausgegangen, dass sich die Sensoren und die Aktoren ideal verhalten. Wenn jedoch die Aktordynamik mit in Betracht gezogen wird, kann eine unbedingte Stabilität nicht mehr garantiert werden. In diesem Fall können die Pole des Aktors irgendwo nahe den Eigenmoden des Systems liegen und somit die Wurzelortskurve sich in die rechte Halbebene verlagern.

4.2.4.4 Beschleunigungsrückführung für MIMO-Systeme

Hier betrachten wir den allgemeineren Fall eines MIMO-Systems mit m kollokierten Aktor-Sensor-Paaren und einer Reihe von l Reglern zweiter Ordnung. Die Struktur- und Regelungsgleichungen sind

$$M\ddot{q} + S\dot{q} = Bu \quad (4.26)$$

$$\ddot{y} = \mathbf{B}^T \ddot{q} \quad (4.27)$$

$$\ddot{v} + \boldsymbol{\beta}_f \dot{v} + \boldsymbol{\Omega}_f^2 v = \mathbf{E} \ddot{y} \quad (4.28)$$

$$u = -\mathbf{E}^T \mathbf{G} v, \quad (4.29)$$

wobei $\boldsymbol{\beta}_f = \text{diag}(2\xi_f \omega_f)$, $\boldsymbol{\Omega}_f^2 = \text{diag}(\omega_f^2)$, $\mathbf{G} = \text{diag}(g_i)$ mit $g_i > 0$. Die Dämpfung des Systems wurde der Einfachheit halber nicht berücksichtigt. Wie zuvor ist \mathbf{B} die Einflussmatrix des Reglers und zeigt, wie der Regelausgang u auf die Struktur wirkt. $\mathbf{B}^T \ddot{q}$ ist eine Anzahl von Beschleunigungen, die durch die kollokierten Sensoren aufgenommen werden. \mathbf{E} ist eine nicht quadratische ($l \times m$) Matrix, die es erlaubt, eine größere Anzahl an Reglern als an Aktoren zu benutzen, damit l Eigenmoden mit m Aktoren gedämpft werden können. Die Reglergleichung besteht aus mehreren Reglern zweiter Ordnung, die mit Linear-Kombinationen der Beschleunigungen versorgt werden. Die Regelung ergibt sich, indem man die internen Variablen des Reglers v mit der diagonalen positiven Verstärkungsmatrix \mathbf{G} und dann mit \mathbf{E}^T multipliziert. Es kann nachgewiesen werden, dass dieses System unbedingt asymptotisch stabil ist mit $g_i > 0$; der Beweis basiert auf [LIAPUNOVs](#) direkter Methode nach [Sim u. Lee \(1993\)](#) in [Preumont \(2002\)](#).

Für den mit zwei Aktoren und zwei kollokierten Beschleunigungssensoren ausgerüsteten Rotor gelingt ein guter Dämpfungsgrad für die erste und die dritte Eigenform mit der \mathbf{E} -Matrix in der Größe 4×2 durch Einsetzen von vier PT_2 -Gliedern. Wie im vorangehenden Abschnitt sollte der Reglerentwurf mit der Festlegung des PT_2 -Gliedes höherer Eigenmode begonnen werden. Die Ergebnisse sind hier identisch mit Abb. 4.7 vom letzten Abschnitt, deshalb wird auf eine Darstellung verzichtet.

4.2.5 Positive Verschiebungsrückführung

Die positive Verschiebungsrückführung (PPF - Positive Position Feedback), [Hegewald \(2000\)](#), [Caughey \(1995\)](#), findet meistens bei Strukturen Anwendung, die mit Dehnungsaktoren und -sensoren ausgerüstet sind. Die Zielsetzung ist, wieder einen Regler zweiter Ordnung zu verwenden, um das Roll-Off der

Regelstrecke in höheren Frequenzen zu verbessern und eine Stabilisierung zu garantieren.

Die PPF wird hier für zwei Fälle untersucht: SISO-Systeme mit vielen Freiheitsgraden (Eigenmoden) und MIMO-Systeme.

4.2.5.1 SISO-System

Für ein SISO-System lautet die Gleichung des Reglers

$$C(s) = \frac{-g}{s^2 + 2\xi_f \omega_f s + \omega_f^2} \quad (4.30)$$

Verglichen mit (4.24) ist hier der Ausgang des Systems proportional zur Verschiebung (z.B. Dehnungssensor) und es erscheint ein Minuszeichen im Regler, welches zusammen mit dem Minuszeichen der Rückkopplung eine positive Rückführung bewirkt.

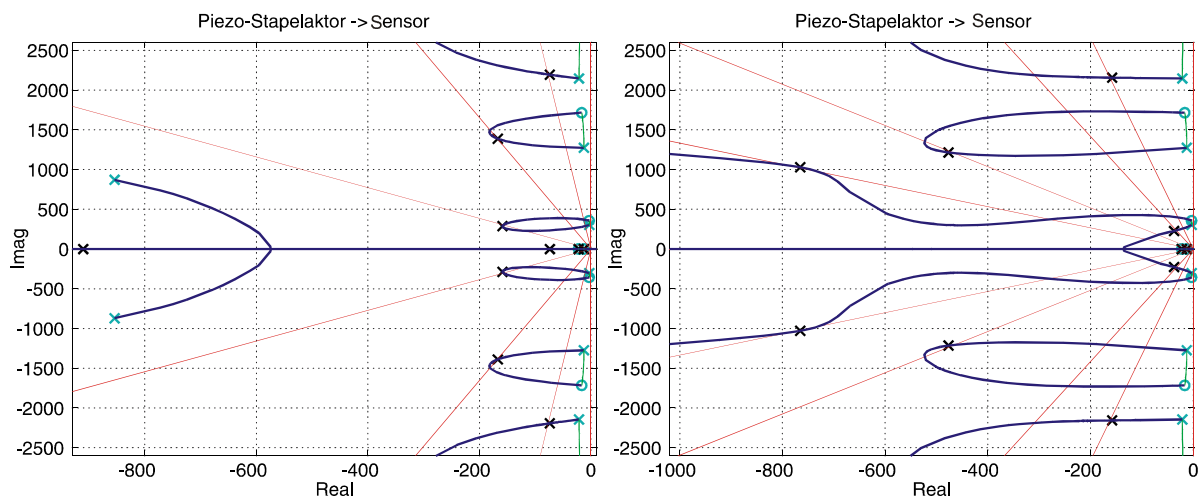


Abb. 4.8: Wurzelortskurve der positiven Verschiebungsrückführung bei der Einstellung des Reglers auf die erste Eigenmode (links) und auf die zweite Eigenmode (rechts)

Abb. 4.8 zeigt die Wurzelortskurven, wenn der Regler auf die ersten Eigenmode und bzw. zweiten Eigenmode eingestellt wird. Aus den Abbildungen erkennt man, dass die Einstellung des Reglers sehr ähnlich zur Beschleunigungsrückführung für SISO-Systeme mit mehreren Eigenmoden ist. Gleichmaßen hat die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises ein Roll-Off von 40 dB/decade. Jedoch gibt es eine Stabilitätsgrenze, die dann erreicht

wird, wenn die statische Steifigkeit des offenen Regelkreises den Wert Eins annimmt. Es ist anzumerken, dass diese Bedingung nicht von der Dämpfung abhängt. Eine Verringerung der statischen Steifigkeit ist unvermeidbar (Abb. 4.9). Der Regelkreis besitzt meist eine geringe Phasenreserve.

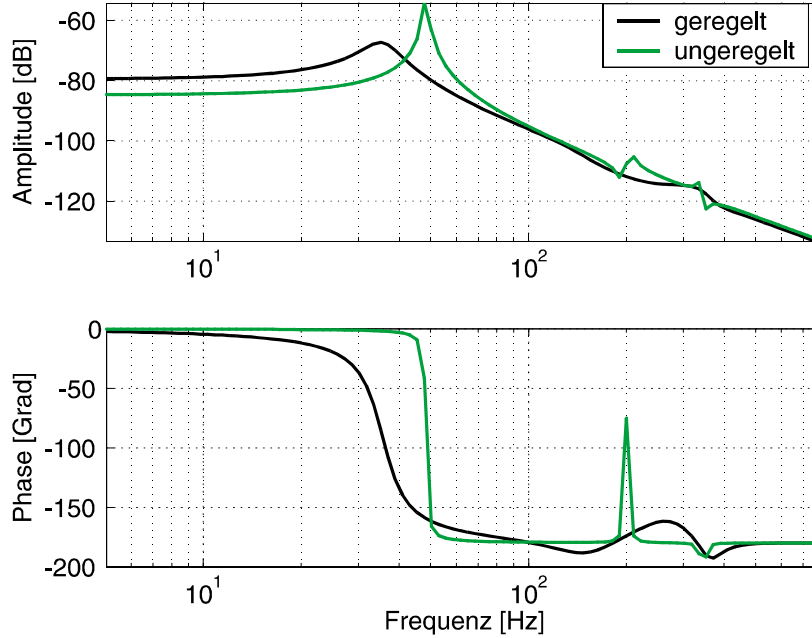


Abb. 4.9: Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit positiver Verschiebungsrückführung zwischen dem Aktor und Wegsensor in der Wellenmitte

4.2.5.2 MIMO-System

Die Erweiterung der SISO-Systeme mit vielen Eigenmoden verhält sich ähnlich der Beschleunigungsrückführung. Die modale Selektivität wird hier auch erzielt, indem man die Filtereigenfrequenz ω_f auf den zu berücksichtigenden Eigenmoden einstellt. Ähnlich wie beim Entwurf des Reglers der Beschleunigungsrückführung, der einige Eigenmoden miteinbezogen hat, beginnt man praktischerweise mit höheren Frequenzen. Die Implementierung der PPF für MIMO-Systeme ist auch der Beschleunigungsrückführung sehr ähnlich:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{S}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}u \quad (4.31)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}^T \mathbf{q} \quad (4.32)$$

$$\ddot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\beta}_f \dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\Omega}_f^2 \mathbf{v} = \mathbf{E}^T \mathbf{G} \mathbf{y} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{E}^T \mathbf{G} \mathbf{v} \quad (4.34)$$

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen der asymptotischen Stabilität können auch hier mit der direkten Methode von [LYAPUNOV](#) hergeleitet werden, [Fanson u. Caughey \(1990\)](#). Im Rahmen der Implementierung der Regler für das Rotorsystem in beiden Ebenen gleichen die Ergebnisse denen des vorangegangenen Abschnitts, weshalb hier auf die Darstellung der Ergebnisse verzichtet wird.

4.2.6 Integrale Krafrückführung

Bei dem Konzept der integralen Krafrückführung (IFF - Integral Force Feedback) handelt sich um eine praktisch sinnvolle Methode zur Dissipation der Energie. Man verwendet eine positive Rückführung des integrierten Kraftsignals für einen Dehnungsaktor. Die typische Übertragungsfunktion der Regelstrecke zwischen der Spannung am Piezoaktor und am Sensor ist in Abb. 4.10 dargestellt.

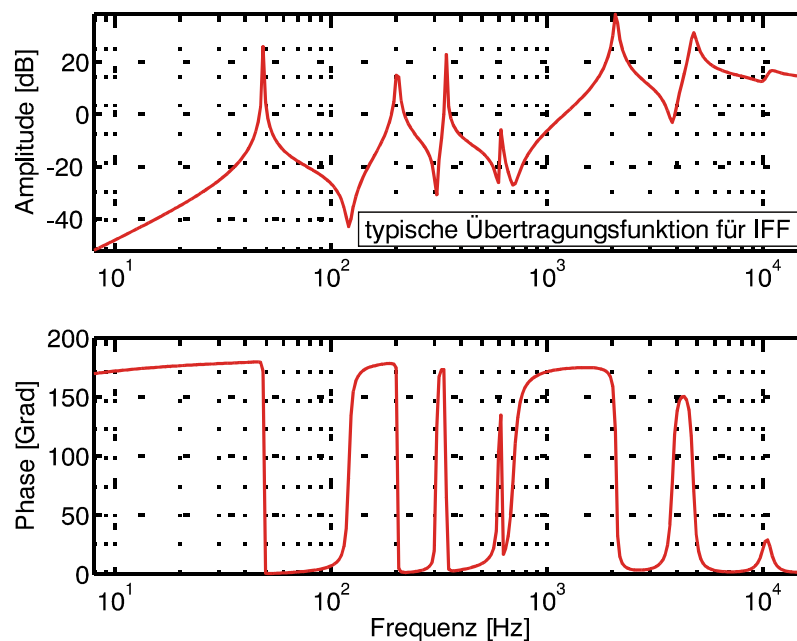


Abb. 4.10: Die Übertragungsfunktion der Regelstrecke für IFF

Voraussetzung ist, dass ein Kraftsensor zwischen dem Aktor und dem Lageraußenring im Kraftfluss positioniert wird, um die Phasenverluste des Verstärkers und Reglers im relevanten Frequenzbereich klein zu halten. In diesem Fall wird theoretisch unbedingte Stabilität des Regelkreises und eine robuste Regelgüte garantiert, mit dem Regler

$$C(s) = -\frac{g}{s}. \quad (4.35)$$

Das negative Vorzeichen in (4.35) erzeugt mit dem negativen Zeichen der Rückkopplung eine positive Rückführung.

Der maximale Dämpfungsgrad wird für die Reglerverstärkung mit

$$g = \frac{\Omega_i}{S_a} \sqrt{\frac{\Omega_i}{\omega_i}} \quad (4.36)$$

erreicht, [Preumont \(2002\) Seite 106](#), worin S_a die Steifigkeit des Aktors, ω_i die i -te Eigenfrequenz der Struktur mit integriertem Aktor und Ω_i die i -te Eigenfrequenz der Struktur ohne Aktor ist. Abb. 4.11 veranschaulicht die Wurzelortskurve des offenen Kreises mit relativ hohem Dämpfungsgrad für alle Eigenformen, wobei der Pol im Ursprung dem Pol des Reglers entspricht.

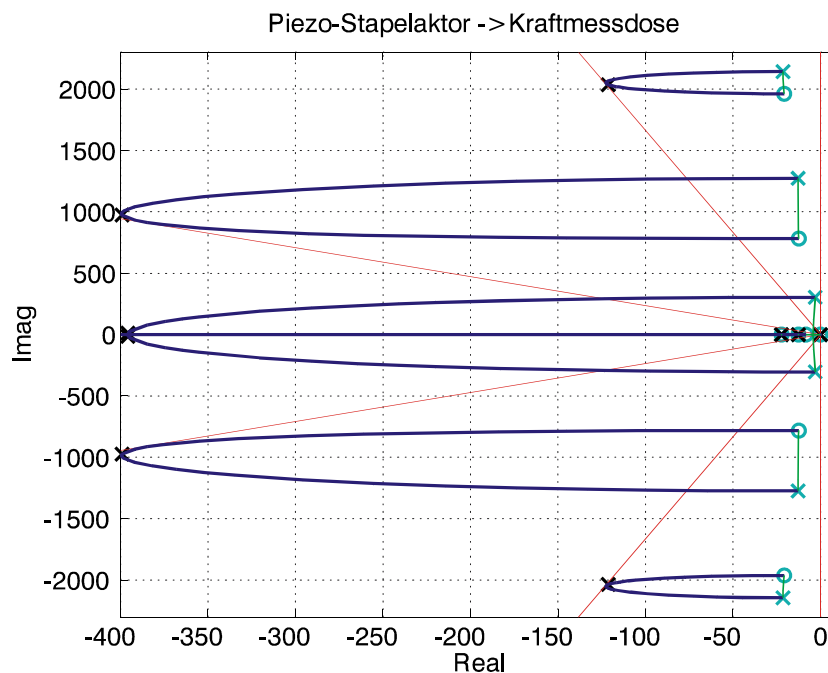


Abb. 4.11: Wurzelortskurve des offenen Regelkreises ohne und mit einem reinen Integrator

Ein selten benannter Nachteil der integralen Krafrückführung ist die mit zunehmender Reglerverstärkung g verminderte statische Steifigkeit, d.h. je größer die aktive Zusatzdämpfung gewählt wird, desto geringer wird die statische Steifigkeit. Dies führt dazu, dass wenn z.B. eine statische Druckkraft auf das System aufgebracht wird, sich der Aktor durch die positive integrierte

Kraftrückführung zusammenzieht, was einer statischen Nachgiebigkeit im Lager entspricht. Die Darstellung dieser Phänomene ist in Abb. 4.12 illustriert. Um diesem Effekt entgegen zu wirken, sollte man an Stelle des Integrators folgendes Tiefpassfilter verwenden, das tieffrequent eine geringere Amplitude als der Integrator besitzt und bei der zu dämpfenden Resonanz eine um -90 Grad Phase aufweist.

$$C(s) = -\frac{g}{s + \omega_L}, \quad (4.37)$$

mit der Eckfrequenz ω_L (Richtwert: $\omega_L = 0,1 \dots 1 \cdot \omega_0$). Hierbei ist ω_0 die tiefste Eigenfrequenz der Struktur.

Mit weiterem Zufügen eines Hochpassfilters kann man die Situation noch verbessern. Dies beeinträchtigt die Stabilität des Regelkreises nicht, aber geht zur Last der Regelgüte. Es verändert das Regelgesetz zu:

$$C(s) = -\frac{g}{s + \omega_L} \cdot \frac{s}{s + \omega_L}. \quad (4.38)$$

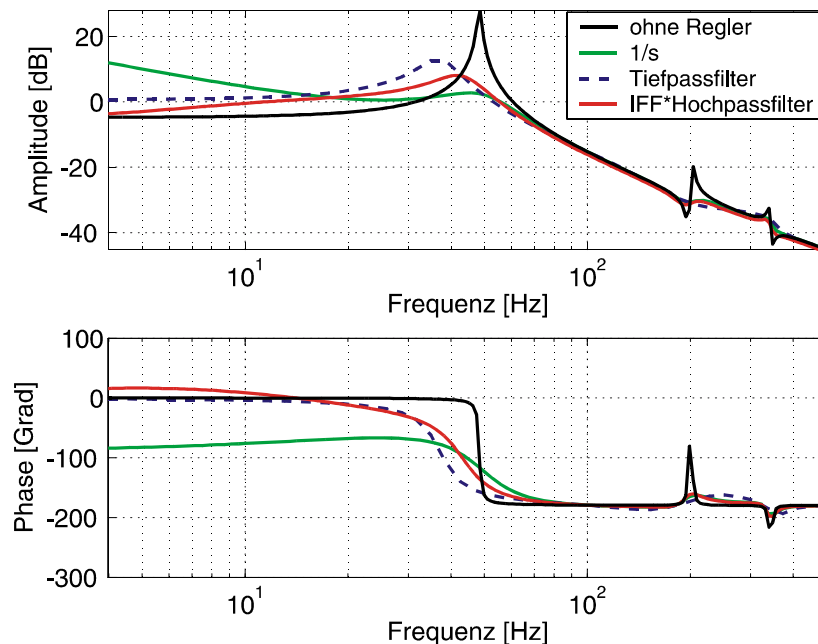


Abb. 4.12: Wirkung der integralen Kraftrückführung als reine Integration und Tiefpassfilter mit und ohne Erweiterung

Eine Optimierung der Nachgiebigkeit kann zwar durch manuelle Anpassung der Eckfrequenz des Filters ω_L erreicht werden; die Regelgüte könnte durch diese Maßnahme jedoch beeinträchtigt und der maximal erreichbare Dämpfungsgrad

vermindert werden. Der Effekt des Steifigkeitsverlustes kann nicht mit dem Kraftsensor beobachtet werden; deshalb wird mit einem zusätzlichen Wegsensor in der Mitte der Welle die Übertragungsfunktion zwischen der Stellkraft oder dem Stellweg und der Verschiebung der Mitte der Welle gemessen. Dies wurde in Abb. 4.12 für die reine integrale Krafrückführung gemäß (4.35), Tiefpassfilter gemäß (4.37) und die Erweiterung um das Hochpassfilter gemäß (4.38) illustriert.

4.3 Robuste Regelungssynthese

Nachdem die dezentrale Regelung im Fall der Kollokation behandelt worden ist, werden hier einige Methoden demonstriert, die die Möglichkeit der Platzierung der Sensoren an relevanten Stellen bieten. Dies setzt die Eigenschaften der Kollokation außer Funktion.

Wenn es nicht möglich ist, den Aktor dort, wo die größte Dissipation der Energie einer Eigenmode erreicht wird, zu platzieren, ist es von Vorteil, die Sensoren an günstigen Orten zu verwenden, wo die maximale Amplitude (je nach Sensorart) vorzufinden ist. In einem Fallbeispiel, wo ein Wegsensor verwendet wird und die erste Eigenmode eines beidseitig gelagerten Balkens zu untersuchen ist, sollte der Sensor in der Mitte der Welle platziert werden, wo die maximale Verschiebung bzw. der "Bauch" der ersten Eigenschwingung liegt. Hier entfällt aber die Kollokation, wodurch die abwechselnden konjugiert komplexen Polen und Nullstellen nicht mehr existieren. Dies führt dazu, dass die Phase um weitere 180 Grad sinkt, so dass die einfachen Regelprinzipien nicht mehr anwendbar sind. Weitere Aussagen zur Aktor- und Sensorplatzierung werden z.B. in [Yan u. Yam \(2002\)](#), [Mirza u. Niekerk \(1999\)](#) und [Balas u. Young \(1999\)](#) getroffen.

Gesucht ist weiterhin eine gute Regelgüte und eine hohe Robustheit des geschlossenen Regelkreises gegen Unsicherheiten. Um an ein formalistisches Entwurfsverfahren zu gelangen, bieten sich bekannte Methoden zur Reglersynthese, die \mathcal{H}_2 - und \mathcal{H}_∞ -optimale Synthese sowie die μ -Synthese an. Anders als bei der Kollokation im Abschnitt 4.2, deren Parameter durch manuelles Einstellen auch ohne Modell optimiert werden können, muss der Regelungstechniker zwangsläufig auf mathematische oder physikalische Modelle

sowie Simulation zurückgreifen. Bei vielen praktischen Reglerentwürfen liegt kaum ein exaktes Modell der Regelstrecke vor; es existiert lediglich ein mathematisches Modell, das gegenüber der Realität gewisse Unschärfen aufweist. Derartige Modellunsicherheiten sind aus einer Vielzahl von Gründen praktisch unvermeidlich: Unbekannte Eigendynamiken der Regelstrecke, Nichtlinearitäten, nicht modellierte Eigenformen, Parameterunsicherheiten und -schwankungen oder Alterung.

Die \mathcal{H}_2 -optimale Synthese kann nicht garantieren, dass wegen der unvermeidlichen Abweichung zwischen Modell und der realen Regelstrecke die theoretische Regelgüte praktisch erreicht wird. Ein Grund hierfür liegt in den nicht modellierten Eigenformen, die den Regelkreis bis zur Instabilität führen können (Spillover-Effekt). Dieses Problem wird durch die Erweiterung des nominellen Modells mit Modellunsicherheiten in der \mathcal{H}_∞ -optimalen Synthese berücksichtigt. Diese Synthese beinhaltet additive und multiplikative Unsicherheiten, worauf später noch eingegangen wird. Eine Weiterentwicklung der \mathcal{H}_∞ -Synthese stellt die μ -Synthese dar, welche neben den obengenannten Unsicherheiten auch eine Modellierung der parametrischen Unsicherheiten und Robustheitsuntersuchungen für einen größeren Bereich von Modellunsicherheiten erlaubt und immer weniger konservative Ergebnisse liefert.

Da ein Regler stets für das Modell entworfen wird, besteht für das reale System bei zu großen Abweichungen vom Modell die Gefahr der Instabilität oder der Beeinträchtigung der Regelgüte. Hier kann eine robuste Reglersynthese die Situation deutlich verbessern. Die Ausführungen dieses Abschnittes können in zwei Teile unterteilt werden: Nach einer Einführung mit grundsätzlichen Überlegungen zur Stabilität mit unstrukturierten Unsicherheiten wird die \mathcal{H}_∞ -Methode als robuste Regelung vorgestellt. Abgesehen von Eingrößen- und günstigen Mehrgrößensystemen können die Anforderungen an die Regelgüte erst dann garantiert werden, wenn die tatsächliche Regelstrecke und das Modell im Einklang stehen, [Eich \(1992\)](#). Diese Einschränkung entfällt bei der μ -Methode. Sie ist Gegenstand des zweiten Teils des Abschnittes. Wie bereits erwähnt

wurde, ist das μ -Verfahren eine Weiterentwicklung der \mathcal{H}_∞ -Synthese und besitzt außer der Berücksichtigung der Regelgüte folgende wichtige Vorteile:

- Weniger konservative Ergebnisse
- Abbildung und Robustheitsuntersuchung gezielter und tatsächlicher Mechanismen

Der Abschnitt zur μ -Methode schließt mit der Diskussion des Entwurfsverfahrens und einem Entwurfsbeispiel.

4.3.1 Einführung

Gegeben sei die Standardversion des Regelkreises in Abb. 4.13,

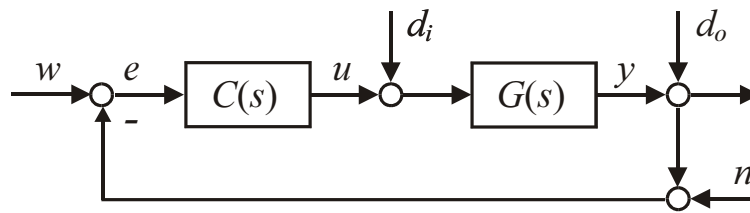


Abb. 4.13: Standard-Regelkreis

wobei die Regelgröße $y(s)$, der Fehler (die Regelabweichung) $e(s)$ und die Stellgröße $u(s)$ aus der Überlagerung der vier Eingänge Führungsgröße $w(s)$, Störung am Eingang $d_i(s)$, Störung am Ausgang $d_o(s)$ und Messstörung $n(s)$ ermittelt werden. Da $d_o(s)$ und $n(s)$ die gleiche Wirkung auf das System haben, werden sie zusammengefasst.

Die Übertragungsfunktionen zwischen den Eingängen und Ausgängen sind in Matrizenschreibweise für MIMO-Systeme kompakt geschrieben in

$$\begin{bmatrix} y \\ -e \\ u \\ u + d_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_o & GS_i \\ S_o & GS_i \\ -CS_o & -T_i \\ -CS_o & S_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w + d_o + n \\ d_i \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

worin die Führungsgröße $w(s)$, die Störung am Ausgang $d_o(s)$ und die Messstörung $n(s)$ zusammengefasst worden sind, [Schönhoff \(2003\) Seite 63](#), und

$$\mathbf{S}_o = (\mathbf{I} + \mathbf{G}\mathbf{C})^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{S}_i = (\mathbf{I} + \mathbf{C}\mathbf{G})^{-1} \quad (4.40)$$

die Ausgang- bzw. Eingang-Empfindlichkeitsfunktion und

$$\mathbf{T}_o = \mathbf{G}\mathbf{S}_i\mathbf{C} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_i = \mathbf{C}\mathbf{S}_o\mathbf{G}. \quad (4.41)$$

die komplementäre Ausgang- bzw. Eingang-Empfindlichkeitsfunktion sind.

In SISO-Systemen unterscheiden sich die Ausgang- und Eingang-Empfindlichkeitsfunktion bzw. die komplementäre Ausgang- bzw. Eingang-Empfindlichkeitsfunktion nicht, d.h.

$$\mathbf{S}_o = \mathbf{S}_i = \mathbf{S} \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_o = \mathbf{T}_i = \mathbf{T}. \quad (4.42)$$

An manchen Stellen verzichtet man beim Schreiben der Übertragungsfunktionen auf (s) .

Typische Anforderungen an einen praktischen Regelkreis lassen sich hier wie folgt formulieren. Diese sind:

- Die Stabilität des Gesamtsystems, d.h. eine große Phasenreserve von $\mathbf{C}\mathbf{G}$.
- Gutes Folgeverhalten und geringe Regelabweichung bei Änderungen der Führungsgröße.
- Störgrößenunterdrückung und minimale Auswirkung von Störgrößen auf die Regelabweichung.
- Moderate Stellfähigkeit infolge beliebiger Störungen des stationären Zustandes.
- Messstörungsunterdrückung und minimale Auswirkung von Messstörungen auf die Regelabweichung.
- Parameterunempfindlichkeit, d.h. ein robuster Regelkreis.

Damit die Regelabweichung e bei der Änderung der Führungsgröße w und die Auswirkungen der Systemstörungen am Ausgang d_o klein bleiben, muss die Empfindlichkeitsfunktion $S(s)$ klein sein: $S(s) \ll 1$. Also sind die Maßnahmen für ein gutes Folgeverhalten und eine gute Störgrößenunterdrückung gleich und widersprechen einander nicht.

Ein Maß für die Parameterunempfindlichkeit ist die relative Empfindlichkeit, die als Grenzwert des Verhältnisses der relativen Änderung der Gesamtübertragungsfunktion zur relativen Änderung der Strecke definiert ist:

$$\frac{\partial T}{T} \div \frac{\partial G}{G} = \frac{1}{1 + C(s)G(s)} = S(s) \quad (4.43)$$

Ist die relative Empfindlichkeit klein, so ändert sich $T(s)$ wenig, wenn sich $G(s)$ ändert, d.h. wenn die Forderung $S(s) \ll 1$ erfüllt ist, ist auch der Regelkreis gegenüber Parameterschwankungen der Regelstrecke unempfindlich bzw. er ist robust. Aus technischen Gründen muss jede Stellgröße $u(s)$, also $C(s)S(s)$, beschränkt bleiben. Die Stellgröße steigt generell bei zunehmender Frequenz aufgrund der Massenträgheit an, also muss $|C(s)S(s)|$ entsprechend klein gehalten werden. Ist $G(s)S(s)$ klein, erhält man eine gute Störgrößenunterdrückung für die Störungen $d_i(s)$ am Eingang der Regelstrecke, besonders für die Resonanzüberhöhung der Störübertragungsfunktion. Für kleine Auswirkungen der Messstörungen muss die komplementäre Empfindlichkeitsfunktion $T(s)$ klein sein: $T(s) \ll 1$.

Ferner wird gezeigt, dass alle gewünschten Forderungen nicht unabhängig voneinander erfüllt werden können, z.B. da $T(s) = 1 - S(s)$ ist, können beide Übertragungsfunktionen nicht gleichzeitig klein gehalten werden. Deshalb ist ein Abwägen der Anforderungen an die Regelgüte notwendig.

4.3.2 Singulärwerte und \mathcal{H}_∞ -Norm

Bei einem Eingrößensystem $G(s)$ besteht die folgende Relation zwischen den Beträgen eines harmonischen Ausgangssignals $y(j\omega)$ und eines gleichartigen Eingangssignals $u(j\omega)$

$$|G(j\omega)| = \frac{|y(j\omega)|}{|u(j\omega)|}. \quad (4.44)$$

Für lineare Mehrgrößensysteme gilt

$$Y(s) = \mathbf{G}(s)U(s), \quad (4.45)$$

worin $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ das Verhalten zwischen den vektorförmigen Eingangssignalen $U(s)$ ($p \times 1$) und den Ausgangssignalen $Y(s)$ ($q \times 1$) in ZDR beschreibt.

Verwendet man für die Größe eines Vektors den üblichen Betragsbegriff der Euklidischen Vektornorm

$$\|Y(s)\| = \sqrt{\sum_i |Y_i(s)|^2}, \quad (4.46)$$

kann man für (4.45) die Normeigenschaft

$$\|Y(s)\| = \|\mathbf{G}(s)U(s)\| \leq \|\mathbf{G}(s)\| \cdot \|U(s)\| \quad (4.47)$$

verwenden, worin die Ungleichung erst dann für alle Vektoren gilt, wenn die verwendete Matrixnorm $\|\mathbf{G}(s)\|$ mit der Vektornorm $\|U(s)\|$ verträglich ist. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn als Matrixnorm der größte Singulärwert von \mathbf{G} gewählt wird

$$\|\mathbf{G}\| = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{G}^* \mathbf{G})} = \bar{\sigma}(\mathbf{G}). \quad (4.48)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{G}^* die konjugiert komplex transponierte Form der Matrix \mathbf{G} und λ_{\max} den maximalen Eigenwert der Matrix $\mathbf{G}^* \mathbf{G}$, welche stets für eine reelle quadratische Matrix sorgt, die die Eigenwerte ausschließlich aus \mathbb{R}^+ besitzt. Somit sind auch die Singulärwerte entweder positive reelle Zahlen oder gleich Null. Um eine höhere numerische Genauigkeit zu erreichen, werden die Singulärwerte in der Praxis nicht über die Eigenwerte, sondern über die Singulärwerte-Zerlegung (SVD - Singular Value Decomposition) berechnet, [Anderson et al. \(1999\)](#).

Aufgrund der im Allgemeinen auftretenden Verkopplung zwischen den einzelnen Übertragungsfunktionen eines Mehrgrößensystems erweisen sich die klassischen Methoden der Eingrößenregelung für die Behandlung allgemeiner Mehrgrößenprobleme als unzureichend. In diesem Hinblick haben die Singulärwerte eine große Bedeutung bei der Behandlung von Mehrgrößensystemen in der Regelungstechnik gewonnen, was in engem Zusammenhang mit der in die Robuste Regelung eingeführten \mathcal{H}_∞ -Theorie

stehen. Von besonderem Interesse sind der größte und der kleinste Singulärwert der Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$, die mit $\bar{\sigma}(\mathbf{G})$ bzw. $\underline{\sigma}(\mathbf{G})$ bezeichnet werden.

Werden die Singulärwerte auf die Frequenzgangsmatrix $\mathbf{G}(j\omega)$ eines Mehrgrößensystems angewendet, so führt dies zu einem verallgemeinerten Amplitudengang, der Aussagen über verschiedene Eigenschaften eines Regelungssystems zulässt. Anhand seiner Singulärwerte kann die \mathcal{H}_∞ -Norm eines kontinuierlichen linearen zeitinvarianten Übertragungssystems definiert werden:

$$\|\mathbf{G}\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\omega \in \mathbb{R}^+} \bar{\sigma}(\mathbf{G}(j\omega))$$

$\|\mathbf{G}(s)\|_\infty$ ist hierbei die \mathcal{H}_∞ -Norm des Systems $\mathbf{G}(s)$. Sie ermöglicht es, die Verstärkung oder „Größe“ des Systems zu einem einzigen reellen Zahlenwert in Relation zu setzen. Wegen ihres funktionaltheoretischen Hintergrunds erfordert die \mathcal{H}_∞ -Norm Systemstabilität.

Eine sehr anschauliche Darstellung der \mathcal{H}_∞ -Norm ist möglich, wenn man den Singulärwert Plot einer Übertragungsmatrix vorliegen hat. Die \mathcal{H}_∞ -Norm ist dann eine Gerade, die das Maximum des größten Singulärwertes $\bar{\sigma}(\mathbf{G})$ streift, falls dieses existiert, ansonsten die kleinste obere Schranke zu $\bar{\sigma}(\mathbf{G})$.

4.3.3 Der Grundgedanke der \mathcal{H}_∞ -Synthese

Eine Übertragungsfunktion $h(s)$ in einem SISO-System sollte mit Hilfe der Reglerübertragungsfunktion $C(s)$ einer vorgegebenen frequenzabhängigen Übertragungsfunktion $W_h(s)$ aufgezwungen werden. $W_h(s)$ spielt die Rolle einer Gewichtungsfunktion. Sie bringt zum Ausdruck, wo im Frequenzbereich die Einhaltung der Beschränkung von Bedeutung ist. Dann gilt für den gesamten Frequenzbereich

$$|W_h(s)h(s)| \leq 1, \tag{4.49}$$

wobei $W_h^{-1}(s)$ eine Obergrenze für $h(s)$ darstellt.

Mit Hilfe der Singulärwerte und der Definition der \mathcal{H}_∞ -Norm kann die obengenannte Überlegung für ein Einfachsystem direkt auf das Mehrfachsystem, MIMO, übertragen werden.

$$\|W_H(s)H(s)\|_\infty \leq 1 \quad \text{für den gesamten Frequenzbereich,} \quad (4.50)$$

d.h. die \mathcal{H}_∞ -Norm einer Matrix tritt also bei Mehrfachsystemen an die Stelle der oberen Schranke des Betrages einer Übertragungsfunktion bei Einfachsystemen.

4.3.4 Modellierung der Unsicherheiten

Das zu erzeugende Modell soll das reale Verhalten der Strecke beinhalten. Dies ist jedoch nicht möglich. Aus diesem Grund sollten neben dem nominellen Streckenverhalten auch Unsicherheiten abgebildet werden. Ist das nominelle Modell durch einen Unsicherheitsbereich umgeben, sollte das reale Streckenverhalten innerhalb dieses Bereiches liegen.

Einige Methoden der robusten Regleranalyse und -synthese sind entwickelt worden, um eine Erweiterung des nominellen Modells mit der Modellierung von Unsicherheiten zu erlauben. Das erweiterte Modell wird als Modellschar bezeichnet. Durch die Modellschar wird ein definierbarer Bereich beschrieben, der von den Ausgangsgrößen - in Abhängigkeit von den Eingangsgrößen - besetzt werden kann. Die Berücksichtigung von Modellunsicherheiten bei der Reglersynthese führte zu Übereinstimmungen zwischen theoretischen Vorhersagen und praktisch erzielten Ergebnissen.

Der Bereich des unsicheren Modells wird ausgedrückt durch die sogenannte “Linear Fractional Transformation” (LFT), die im Rahmen der robusten Regelung weit verbreitet ist. Die LFT erlaubt eine einfache und einheitliche Notation für sämtliche Verschaltungsarten von zwei Übertragungssystemen. Dies wird für eine Modellschar durch das Blockschaltbild in Abb. 4.14 als Rückführung dargestellt.

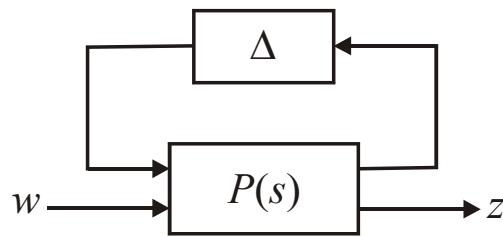


Abb. 4.14: Allgemeine Struktur des Modells mit Unsicherheiten

$P \star \Delta$ beschreibt das Übertragungsverhalten der Modellschar zwischen den freien Ein- und Ausgangsvektoren. Das nominelle Modell und alle verfügbaren Informationen über die Regelstrecke sowie die Beschreibung, wo und in welchem Ausmaß das nominelle Modell von der realen Regelstrecke abweichen kann, sind in $P(s)$ zusammengefasst. Die unbekannten Daten der Regelstrecke werden im Block Δ abgebildet. Der Operator Δ repräsentiert die eigentliche Unsicherheit in der Modellbeschreibung und kann beliebig innerhalb vorgegebener Grenzen und Strukturen variieren, wobei definitionsgemäß $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$ gilt. Auf Grund einer in der Literatur zur robusten Regelung erkennbaren Tendenz zur "Redheffer Sternprodukt-Schreibweise" $P \star \Delta$ dient diese Notation zur Verknüpfung von Blöcken mit mehreren Ein- und Ausgangsgrößen. Ausführliche Diskussionen zu LFTs finden sich in den bereits zitierten Beiträgen von [Lu u. Doyle \(1992\)](#) und von [Zhou u. Klmura\(1995\)](#)

Die Art und Weise der Beschreibung der Unsicherheiten für eine Modellschar spiegelt sich im Operator Δ wieder. Dieses ist sehr unterschiedlich und hängt stark von den Ursachen ab, warum ein nominelles Modell von der wirklichen Regelstrecke abweicht. Da mit zunehmender Größe der Unsicherheiten auch die erreichbare Regelgüte abnimmt, müssen Art und Größe der Unsicherheiten geschickt gewählt werden.

Mit der Annahme, dass sowohl die Modellschar bzw. das nominelle Modell als auch die tatsächliche Regelstrecke linear, zeitinvariant und "endlich-dimensional" sind, unterscheidet man die Unsicherheiten in zwei Gruppen, nämlich den parametrischen und den dynamischen Unsicherheiten, vgl. [Balas et al. \(1989\)](#).

Eine andere Unterteilung der Unsicherheiten basiert auf möglichen Strukturen, die als strukturierte und unstrukturierte Unsicherheiten definiert werden, [Balas u. Doyle \(1990\)](#). Während bei strukturierten Unsicherheiten die Ursache und Wirkung der Unsicherheiten im Detail betrachtet wird, bildet man unstrukturierte Unsicherheiten aus einer Globalbetrachtung des Ein-/Ausgangsverhaltens einer Regelstrecke ab.

Prinzipiell weisen parametrische Unsicherheiten ein hohes Maß an Strukturinformation auf; sie sind strukturiert. Dynamische Unsicherheiten hingegen, mit denen die Abweichungen zwischen dem nominellen Modell und der praktischen Regelstrecke beschrieben werden, besitzen lediglich eine minimale Strukturierung, [Eich \(1999\)](#).

In den zwei folgenden Abschnitten werden die hier genannten Begriffe verdeutlicht. In einem ersten Schritt kommt der Begriff der parametrischen Unsicherheit zur Vorstellung. Es folgt eine Erläuterung der dynamischen Unsicherheiten, die nicht parametrisch beschrieben werden können.

4.3.5 Parametrische Unsicherheiten

In vielen Fällen können physikalische Parameter in Differentialgleichungen eines technischen Systems, wie z.B. Massen, Steifigkeiten, Dämpfungskoeffizienten, elektrische Widerstände, Kapazitäten oder Durchflusskoeffizienten nicht exakt bestimmt werden, oder sie können im Betrieb innerhalb bestimmter Grenzen variieren. Die Parameterschwankung eines beliebigen Parameters p wird innerhalb eines begrenzten Wertebereichs als parametrische Unsicherheit

$$p = p_0(1 + p_v \delta_p), \quad |\delta_p| \leq 1, \quad \delta_p, p, p_0, p_v \in \mathbb{R} \quad (4.51)$$

beschrieben. Der Parameter p_0 repräsentiert das nominelle Verhalten, während p_v die dimensionslose relative Schwankung wiedergibt. $p_0 p_v$ beschreibt die additiv wirkende Parameterunsicherheit W_p und beinhaltet alle bekannten Informationen bezüglich des Parameters p . Der Unsicherheitsoperator δ_p besitzt keinen festen Zahlenwert und gestattet daher, dass p in (4.51) jeden Wert in einem bestimmten Wertebereich annehmen kann.

Betrachtet wird nun exemplarisch eine Modellschar für ein dynamisches System mit Parameterschwankungen. Für die allgemeine Übertragungsfunktion als einfachste Modellform eines ungedämpften Massenschwingers

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b}{s^2 + a} \quad (4.52)$$

betrachtet man eine mögliche Zustandsraumdarstellung für das Modell wie folgt:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ u \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

wobei die Parameter a, b folgende Unsicherheiten beinhalten:

$$a = a_0 + W_a \delta_a \quad (4.54)$$

$$b = b_0 + W_b \delta_b \quad (4.55)$$

Daraus ergibt sich das Blockschaltbild der Modellschar in Abb. 4.15, wobei der Einfluss der Unsicherheiten auf das Übertragungsverhalten zu sehen ist.

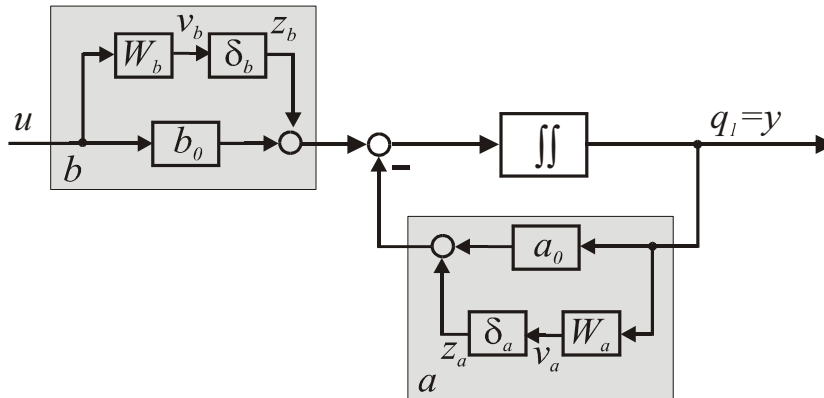


Abb. 4.15: Blockschaltbild des Modells mit Unsicherheiten

Zeichnet man das Blockschaltbild der Modellschar in Abb. 4.15 gemäß Abb. 4.14 um, werden die Operatoren δ_a und δ_b im Block Δ

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_a & 0 \\ 0 & \delta_b \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

zusammengefasst (Abb. 4.16). Die Zustandsraumdarstellung für das System $P(s)$ lässt sich in Abb. 4.16 wie folgt bestimmen:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ v_a \\ v_b \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_0 & 0 & 1 & -1 & b_0 \\ \hline W_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & W_b \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ z_a \\ z_b \\ u \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Die Gleichung (4.57) entspricht dem nominellen Modell der Regelstrecke zwischen Eingang u und Ausgang y in Abb. 4.16. Die Änderung des Übertragungsverhaltens bezüglich der Parameterunsicherheiten sind in Verbindung mit Δ zu beschreiben. Die gesamte Übertragungsfunktion mit den wahren Werten von b und a wird hierdurch wie folgt erhalten:

$$G(s) = P \star \Delta \quad (4.58)$$

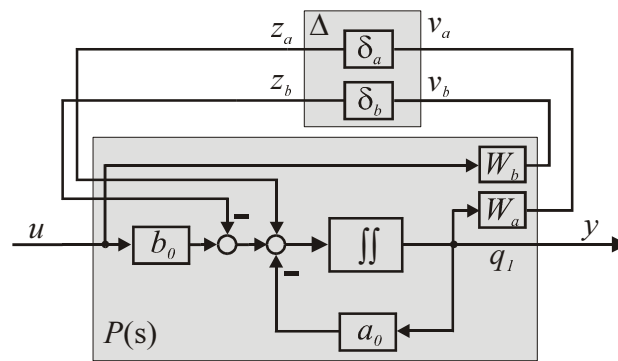


Abb. 4.16: Struktur des Modells mit Unsicherheiten

Als weiteres Beispiel möge hier ein Einmassenschwinger zweiter Ordnung (Masse-Feder-Dämpfer-System) in Betracht kommen. Das Blockschaltbild des nominellen Modells ist in Abb. 4.17 dargestellt.

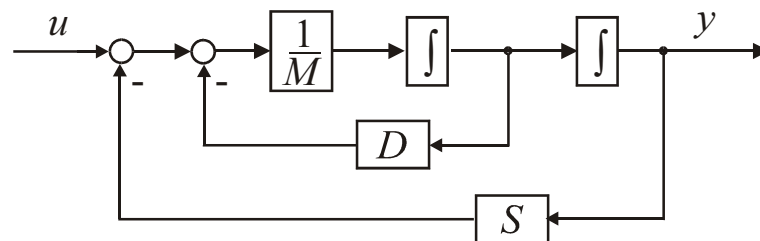


Abb. 4.17: Blockschaltbild des nominellen Modells eines Einmassenschwingers

Angenommen können die reale Masse M , der Dämpfungskoeffizient D und die Federsteifigkeit S im Bereich

$$M = M_0 (1 + M_v \delta_M), \quad |\delta_M| \leq 1, \quad (4.59)$$

$$D = D_0 (1 + D_v \delta_D), \quad |\delta_D| \leq 1 \quad (4.60)$$

und

$$S = S_0 (1 + S_v \delta_S), \quad |\delta_S| \leq 1 \quad (4.61)$$

variieren, mit den dimensionslosen relativen Schwankungen M_v , D_v und S_v . Nun müssen die nominellen Werte für die Steifigkeit, Dämpfung und den Kehrwert der Masse in Abb. 4.17 ersetzt werden. Die folgenden Blockschaltbilder geben das Modell der unsicheren Parameter aus (4.59), (4.60) und (4.61) wieder.

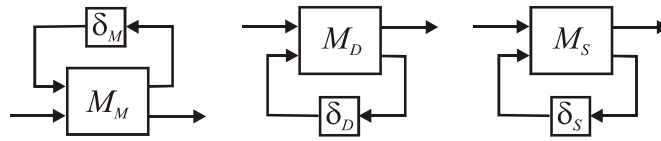


Abb. 4.18: Blockschaltbild des Modells der unsicheren Parameter

Hierin sind

$$M_M = \frac{1}{M_0} \begin{bmatrix} -W_M & 1 \\ -W_M & 1 \end{bmatrix}, M_D = \begin{bmatrix} D_0 & W_D \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ und } M_S = \begin{bmatrix} S_0 & W_S \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

mit $W_M = M_0 M_v$, $W_D = D_0 D_v$ und $W_S = S_0 S_v$. Da die Masse im Kehrwert erscheint, hat M_M eine andere Struktur als M_D und M_S . Die Modellschar des Systems ergibt sich aus Einsetzen von M , D und S in Abb. 4.19.

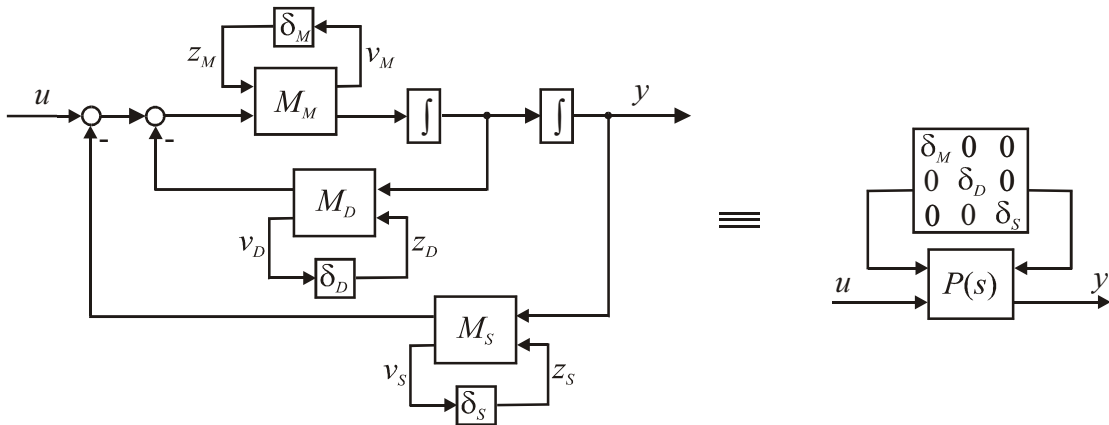


Abb. 4.19: Struktur der Modellschar

In Abb. 4.19, rechts sind die Operatoren δ_M , δ_D und δ_S im Block Δ zusammengefasst.

Aus den Ausführungen dieses Abschnitts geht hervor, wie sich für ein System mit unsicheren Parametern eine Modellschar entwickeln lässt. Hier zeigt sich der große Vorteil parametrischer Unsicherheitsmodelle, der in der ursachenbezogenen Fehlererfassung liegt. Mit solchen Unsicherheitsmodellen lassen sich im Allgemeinen weniger konservative Ergebnisse erzielen. Es ist allerdings von Nachteil, dass strukturelle Abweichungen zwischen dem Modell und der tatsächlichen Regelstrecke nicht anhand parametrischer Unsicherheiten erklärt werden können. Dies kann wiederum mittels dynamischer Unsicherheiten berücksichtigt werden.

4.3.6 Dynamische Unsicherheiten

Um die Abweichungen zwischen Modell und Realität globaler zu beschreiben, gibt es die Möglichkeit, unstrukturierte Unsicherheiten entweder als additive oder als multiplikative Unsicherheit zu modellieren. Sie können als LFTs dargestellt und daher in die allgemeine Struktur einer Modellschar überführt werden. Additive Unsicherheiten eignen sich insbesondere zur Berücksichtigung nicht modellierter Eigenmoden jenseits des interessierenden Frequenzbereiches. Zur Modellierung der Unsicherheiten von Eigenformen können multiplikative Unsicherheiten verwendet werden. Hierbei werden in Form eines Blockschaltbildes in Abb. 4.20 die Abweichungen zwischen nominellem Modell $G(s)$ und wahrer Regelstrecke $G_0(s)$ für die beiden Fällen, additive und multiplikative Unsicherheit, wiedergegeben.

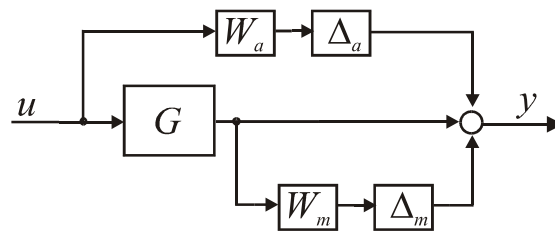


Abb. 4.20: Additive und multiplikative Unsicherheit

Das reale System G_0 lässt sich gemäß Abb. 4.20 ohne Berücksichtigung der multiplikativen Unsicherheit

$$G_0 = G + \Delta_a W_a \quad (4.63)$$

und ohne Berücksichtigung der additiven Unsicherheit

$$G_0 = G(1 + \Delta_m W_m) \quad (4.64)$$

errechnen. Das Ausmaß des Unsicherheitsbereichs wird durch den Verlauf der additiven Unsicherheit W_a und der multiplikativen Unsicherheit W_m definiert. Diese Größen sind im Allgemeinen frequenzabhängig. Die Operatoren Δ_a und Δ_m hingegen repräsentieren die unbekannten Größen wie beispielsweise die Wirkungsrichtung des Fehlermodells und

$$\|\Delta_a\|_\infty \leq 1 \quad (4.65)$$

$$\|\Delta_m\|_\infty \leq 1. \quad (4.66)$$

Hieraus können die Verläufe der additiven Unsicherheit W_a und der multiplikativen Unsicherheit W_m über die Frequenzen aus folgenden Gleichungen bestimmt werden.

$$|G_0(j\omega) - G(j\omega)| \leq |W_a(j\omega)| \quad (4.67)$$

$$\left| \frac{G_0(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)} \right| \leq |W_m(j\omega)| \quad (4.68)$$

Eine Vertiefung der Beschreibung der Unsicherheiten findet man in [Eich \(1999\)](#).

4.3.7 Problemlösungstechnik der \mathcal{H}_∞ -Methode

Das \mathcal{H}_∞ -Reglerentwurfsverfahren basiert auf der Grundstruktur eines Regelkreises, die in der Literatur auch als "*Standard Compensation Configuration*" SCC bezeichnet wird, [Eich \(1992\)](#). Die SCC ist im folgenden Blockschaltbild dargestellt:

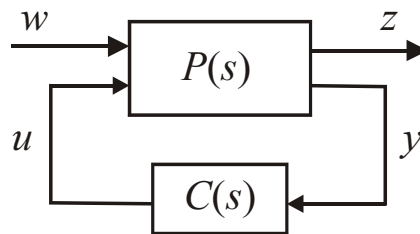


Abb. 4.21: Die Standardform der Modellstruktur für die \mathcal{H}_∞ -optimale Synthese

In diesem Bild bezeichnet $C(s)$ die Übertragungsmatrix des optimalen robusten Reglers und $P(s)$ diejenige der Regelstrecke, die allerdings im Allgemeinen um

verschiedene Übertragungsfunktionen als Optimierungskriterien für den \mathcal{H}_∞ -Entwurf erweitert ist. Die Ein- bzw. Ausgangsgrößen von $P(s)$ sind als Orte für Aktorkräfte u und Sensoren y , die mit den Mess- und Stellgrößen des Reglers physikalisch existente Signale haben, sowie für den Erregerkräften w und relevanten Orten z , die aber durchaus fiktive Bedeutungen haben können und zur Auslegung des geschlossenen Regelkreises und Bestimmung der Regelgüte dienen. Die Optimierungskriterien beinhalten unter anderem die Robustheitsanforderungen an den Regelkreis und werden zu einem späteren Zeitpunkt ausführlicher besprochen.

Im Allgemeinen stellen die Vektoren w alle Störungen des stationären Zustandes dar, während z diejenigen Signale enthält, deren Antworten auf w minimiert werden sollen. Die Dimensionen von w und z hängen von sämtlichen Anforderungen bezüglich des Regelverhaltens ab, die während des Regelungsentwurfs berücksichtigt werden müssen.

Die \mathcal{H}_∞ -Reglerentwurfsaufgabe ergibt sich aus einer gewünschten Beziehung zwischen den Vektoren w und z , die z.B. die gleichzeitigen Reaktionen der Regelabweichung, Stellgröße und Regelgröße als relevante Ausgänge z auf eine Störgröße und Führungsgrößenänderung als Eingangsgrößen w sind.

Zur Herleitung des Übertragungsverhaltens unterteilt man die Matrix $P(s)$ in

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}. \quad (4.69)$$

Die mathematische Beschreibung der in Abb. 4.21 skizzierten Struktur eines Mehrfachregelkreises ist

$$\begin{aligned} z(s) &= P_{11}(s)w(s) + P_{12}(s)u(s) \\ y(s) &= P_{21}(s)w(s) + P_{22}(s)u(s) \\ u(s) &= C(s)y(s). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Dadurch erhält man das gesuchte Übertragungsverhalten

$$z(s) = \underbrace{\left[P_{11}(s) + P_{12}(s)C(s)(I - P_{22}(s)C(s))^{-1}P_{21}(s) \right]}_{P_{zw}(s)} w(s). \quad (4.71)$$

Den Ausdruck $P_{zw}(s)$ in eckigen Klammern, die Übertragungsfunktion von w nach z , bezeichnet man als Kostenfunktion (Cost Function). Die gesamten Forderungen aus (4.50) sind in dieser Matrix erhalten. Sie ist die wichtigste Matrix für die \mathcal{H}_∞ -Methode und somit kann das \mathcal{H}_∞ -Reglerentwurfsproblem endgültig formuliert werden.

Für eine gegebene Regelstrecke soll ein Regler so entworfen werden, dass die Regelstrecke stabilisiert und die \mathcal{H}_∞ -Norm der Kostenfunktion $P_{zw}(s)$ unterhalb einer vorgeschriebenen Grenze gehalten wird, im Allgemeinen

$$\|P_{zw}(s)\|_\infty \leq 1. \quad (4.72)$$

Die Bedingungen zur Existenz einer Lösung wurden in [Doyle et al. \(1989\)](#) gegeben. Der Regler $C(s)$ ist ein Zustandsbeobachter, dessen Beobachtermatrix und Rückkopplungsmatrix als Lösungen zweier algebraischer Matrix- **RICCATI**-Gleichungen gefunden werden. Die Ermittlung eines \mathcal{H}_∞ -Reglers ist nur mit Hilfe eines Computers möglich. Fertige Toolboxes stehen zur Verfügung, so ist beispielsweise die mit MATLAB-Softwarepaket erhältlichen "μ-Analysis and Synthesis Toolbox" von [Balas et al. \(1995\)](#) sehr empfehlenswert.

Die \mathcal{H}_∞ -optimale Synthese führt für Mehrgrößensysteme zu einem Regler, der durch die Spezifikation der Regelgüte gutes Führungs- und Störverhalten aufweist. Darüber hinaus ist er auch noch robust gegenüber Parameterunsicherheiten.

4.3.8 Spezifikation der Regelgüte

Einer der wesentlichen Schritte der Reglersynthese ist die Spezifikation der Regelgüte. Von Regelungsaufgabe zu Regelungsaufgabe ist die Spezifikation der Regelgüte sehr unterschiedlich, was der Regelungstechniker unbedingt beherrschen muss. Grenzen auf die Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises zu setzen, ist ein sehr schwieriger Teil der Aufgabe des Anwenders,

woraus die Spezifikation der Regelgüte bei der robusten Reglersynthese resultiert. Werden die Schranken nicht sorgfältig definiert, führt es dazu, dass die Synthese nicht erfolgreich abgeschlossen wird.

Wie in den vorhergehenden Abschnitten erwähnt wurde, hängen die Übertragungsfunktionen voneinander ab. Aus diesem Grund gibt es ein Zusammenspiel zwischen den Gewichtungen, welches in diesem Abschnitt explizit behandelt wird. Folgerichtig müssen die Gewichtungen für die Übertragungsfunktionen zwischen den externen Störungen und Reaktionen der Struktur an relevanten Orten vorgenommen werden. Im Allgemeinen werden die Sensoren nicht an den relevanten Orten, die ausgegelt werden sollen, platziert und die Aktoren nicht an der Position der Störungen angebracht. In diesem allgemeinen Fall besitzt das Modell, wie in Abb. 4.21 dargestellt ist, einige Eingänge und Ausgänge für die Störungen w und die zu regelnden Variablen z und einige Eingänge und Ausgänge für die Stellgrößen u und die Messgrößen y . Nimmt man die Gewichtungen für andere Eingänge und Ausgänge als die Zugänge (zugängliche Eingänge und Ausgänge) für den Regler vor, führt es zu einer sehr komplizierten Modellierung und Spezifikation der Regelgüte, [Schönhoff \(2003\) Seite 61](#).

Spezifiziert man die Regelgüte zwischen dem Aktoreingang u und dem Sensorausgang y , so werden die Spezifikation und Bewertung der Regelgüte und deren Modellierung erheblich vereinfacht. Außerdem können grundlegende Eigenschaften und Beziehungen des geschlossenen Regelkreises in einer einfachen Weise angegeben werden. Hierbei sollte überprüft werden, dass auch die gewünschten Forderungen an die Regelgüte zwischen w und z erfüllt werden. Dies wird umso eher erreicht, je näher der Aktor am Ort der Erregerkraft bzw. der Sensor am relevanten Ort platziert wird.

Zur Bestimmung der Schranken wird aus dem Regelkreis von Abb. 4.13 und der dazu gehörenden Gleichung (4.39) die Beziehung zwischen den Ein- und Ausgängen so zusammengefasst, dass die interessierenden Übertragungsfunktionen zur Spezifikation vorhanden sind. Hieraus sind die Übertragungsfunktionen für ein SISO-System gegeben mit

$$\begin{bmatrix} -e \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S & GS \\ -CS & -T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -w+n \\ d_i \end{bmatrix}. \quad (4.73)$$

Durch Beschränkung der Störübertragungsfunktion $G(s)S(s)$ kann die Störgrößenunterdrückung quantitativ bestimmt werden. Bei aktiver Schwingungsdämpfung am Rotor wird beabsichtigt, die durch die Störung angeregten Resonanzen zu dämpfen. Deshalb wird die Beschränkung der Resonanzüberhöhung von $G(s)S(s)$ vorgenommen. Die Stellübertragungsfunktion $C(s)S(s)$ ist ein Maß für die notwendige Leistung des Aktors. Diese beschreibt die Antwort der Stellgröße u infolge der Führungsgröße w und der Messstörung n . Eine Minimierung des Verlaufs von $C(s)S(s)$ wird angestrebt, um die gewünschten Anforderungen an $G(s)S(s)$ zu erzielen. Die anderen Anforderungen bezüglich des Regelkreises wurden bereits im Abschnitt 4.3.1 beschrieben.

Zur Realisierung der Spezifikation der Regelgüte muss der Regelkreis um die sogenannten Gewichtungsfunktionen erweitert werden. Die Gewichtungsfunktionen werden mit den Aus- und Eingängen verbunden, wobei nur der Eingang w zur Bestimmung der Schranke von $S(s)$ und $C(s)S(s)$ verwendet wird. Abb. 4.22 zeigt die Erweiterung des Systems um die Gewichtungsfunktionen.

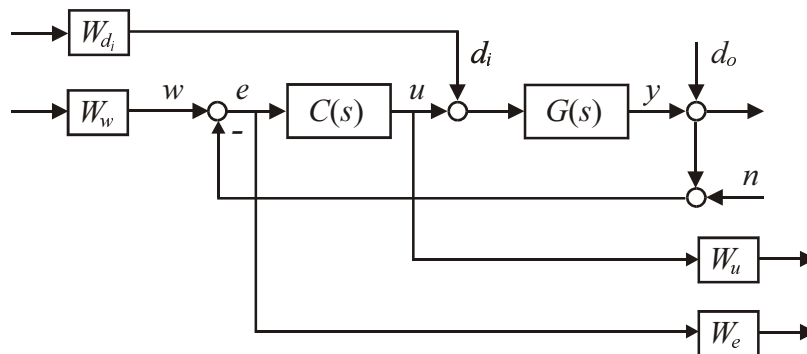


Abb. 4.22: Blockdiagramm zum Entwurf der Gewichtungen

Wie aus Abb. 4.22 zu erkennen ist, sind zwei Gewichtungsfunktionen mit jeder Übertragungsfunktion verknüpft. Folglich können die Gewichtungsfunktionen nicht direkt jeder Übertragungsfunktion zugewiesen werden. Als Folge können die Spezifikationen auf den vier Übertragungsfunktionen nicht unabhängig voneinander gebildet werden.

Wegen dieser Schwierigkeit werden die Ausgangs- und die Eingangsgewichtungen allgemein empirisch vorgewählt, damit die richtigen Schranken gefunden werden können. In \mathcal{H}_∞ - und μ -Synthese werden die gewichteten Übertragungsfunktionen, auf die Spezifikationen angewendet werden müssen, in einem einzelnen Block kombiniert. Dieser Zusammenhang wird wie folgt dargestellt:

$$W_o H W_i = \begin{bmatrix} W_e S W_r & W_e G S W_{d_i} \\ -W_u C S W_r & -W_u T W_{d_i} \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

wobei

$$H = \begin{bmatrix} S(s) & G(s)S(s) \\ -C(s)S(s) & -T(s) \end{bmatrix}, \quad W_o = \begin{bmatrix} W_e & \\ & W_u \end{bmatrix} \text{ und } W_i = \begin{bmatrix} W_r & \\ & W_{d_i} \end{bmatrix}. \quad (4.75)$$

Gemäß der \mathcal{H}_∞ -Theorie sollte für alle Frequenzen $\|W_o H W_i\|_\infty \leq 1$ sein. Daraus ergeben sich die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(S) &\leq |W_e W_r|^{-1}, \quad \bar{\sigma}(CS) \leq |W_u W_r|^{-1} \\ \bar{\sigma}(GS) &\leq |W_e W_{d_i}|^{-1}, \quad \bar{\sigma}(T) \leq |W_u W_{d_i}|^{-1}, \end{aligned} \quad (4.76)$$

worin die Kehrwerte der Gewichtungsfunktionen die Schranken bzw. die maximalen Beträge der Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises definieren. Diese Ungleichungen zeigen die bedeutende Beschränkung, dass die Schranken jeder Übertragungsfunktion nicht unabhängig zugewiesen werden können. Dies kann so interpretiert werden, dass immer ein Freiheitsgrad fehlt. Werden drei Schranken frei gewählt, ergibt sich daraus die vierte Schranke. Man definiert die Gewichtungsfunktionen als Beispiel

$$|W_r| = 1, \quad |W_e| = B_S^{-1}, \quad |W_u| = B_{CS}^{-1} \quad \text{und} \quad |W_{d_i}| = \frac{B_S}{B_{GS}}, \quad (4.77)$$

worin B_S , B_{CS} und B_{GS} die Schranken auf S , CS und GS sind. Diese Schranken können frei festgelegt werden, aber die Schranke auf T kann nicht gewählt werden, sondern ergibt sich aus

$$B_T = \frac{B_{CS} B_{GS}}{B_S}. \quad (4.78)$$

Wird beim Entwurf dieser Zusammenhang nicht berücksichtigt, kann es zu einer unrealisierbaren Schranke für die letzte Übertragungsfunktion führen, z.B. $B_T^{-1} < 1$ für niedrige Frequenzen. Zum Entwurf der Schranken wird empfohlen, mit der Auswahl der Gewichtungsfunktionen für die wichtigsten Übertragungsfunktionen zu beginnen und danach die Schranke auf den restlichen Übertragungsfunktionen zu berechnen. Wie bereits erwähnt wurde, wird die Festlegung der Gewichtungsfunktionen wiederholt, um die gewünschten Ergebnisse zu erzielen. Dies gelingt, indem man die Gewichtungsfunktionen in den Frequenzbereichen ändert, in denen sie eine untergeordnete Rolle spielen. Eine direkte Optimierung der Spezifikation der Regelgüte ist sehr aufwendig und praktisch fast unmöglich.

Um eine Spezifikation durchzuführen und die Gewichtungen richtig zu bestimmen, wird ein Regler benötigt. Hierfür wird eine Annäherung aus herkömmlichen Reglersynthesen angestrebt, die keine direkte Optimierung der Spezifikation anbietet, aber zu einem angemessenen Startpunkt einer iterativen Optimierung führt. Um die Störungen zu unterdrücken, wird für das Modell $G(s)$ ein herkömmlicher Regler $\hat{C}(s)$ so gewählt, dass die gewünschte Dämpfung der relevanten Eigenmoden erreicht wird. Setzt man den Regler $\hat{C}(s)$ ein und baut einen Regelkreis auf, kann man für die erste Iteration erforderliche Schranken und daraus die Gewichtungsfunktionen definieren.

Der PID-Regler ist ein industrieller Standardregler, der für diese Zwecke geeignet ist. [Schönhoff \(2003\)](#) hat die systematische Verwendung des PID-Reglers mit zwei Beispielen ausführlich dargelegt. Zur Stabilisierung hat er ein Tiefpassfilter eingesetzt, wenn es sich nicht um eine flexible Struktur handelt.

Für die erste Iteration kann man $\hat{C}(s)$ auch aus den angegebenen Zusammenhängen im Abschnitt 4.2 bestimmen. Ist ein $\hat{C}(s)$ vorhanden, bildet man mit dem nominellen Modell und Regler den Regelkreis und bestimmt die Schranke auf die Störübertragungsfunktion

$$B_{GS} = \kappa_{GS} \left| \frac{s}{s + \omega_I} \right| = \left| W_e W_{d_i} \right|^{-1}. \quad (4.79)$$

κ_{GS} spielt die Rolle der Verstärkung von B_{GS} und muss so definiert werden, dass B_{GS} die Resonanzspitzen relevanter Eigenmoden von $C(s)S(s)$ abschneidet. ω_I ist die Eckfrequenz jenseits der letzten zu dämpfenden Eigenfrequenz. Statt $|s/(s+\omega_I)|$ könnte auch ein Hochpassfilter mit höherer Ordnung verwendet werden.

Eine Obergrenze für die Stellübertragungsfunktion $G(s)S(s)$ und für die Empfindlichkeitsfunktion $S(s)$ ist

$$B_{CS} = \kappa_{CS} |L_{\omega_L, n_L}(s)| = |W_u W_r|^{-1}, \quad B_S = \kappa_S \left| \frac{s}{s + \omega_I} \right| = |W_e W_r|^{-1}, \quad (4.80)$$

worin $L_{\omega_L, n_L}(s)$ ein Tiefpassfilter der Ordnung n_L mit der Eckfrequenz ω_L . κ_{CS} und κ_S sind die Verstärker von B_{CS} und B_S .

Die Schranke für $T(s)$ kann nicht mehr frei gewählt werden und ergibt sich aus den bisher definierten Schranken

$$B_T = \frac{\kappa_{CS} \kappa_{GS}}{\kappa_S} |L_{\omega_L, n_L}(s)| = |W_u W_{d_i}|^{-1}. \quad (4.81)$$

Zur Realisierung der Gewichtungsfunktionen empfehlen sich:

$$W_e = \frac{s + \omega_I}{s}, W_{d_i} = \frac{1}{\kappa_{GS}}, W_r = \frac{1}{\kappa_S} \text{ und } W_u = \frac{\kappa_S}{\kappa_{CS}} L_{\omega_L, n_L}(s)^{-1} \quad (4.82)$$

Um die Gewichtungsfunktion W_u korrekt zu bilden, müssen n_L Pole von $L_{\omega_L, n_L}(s)$ bei Frequenzen wesentlich höher als ω_L liegen. Da die \mathcal{H}_∞ -Synthese auf die [RICCATI](#)-Gleichung basiert, darf kein Pol auf der imaginären Achse liegen, deshalb muss der Pol von W_e vom Ursprung geringfügig verschoben werden. Eine zusätzliche Anmerkung zum Verlauf der Schranke für $T(s)$ ist, dass diese Schranke immer oberhalb von $T(s)$ bleiben muss. Dies muss bei jeder Iteration überprüft werden. Da alle Schranken invertiert werden, müssen sie jeweils die gleiche Anzahl an Polen und Nullstellen besitzen. Um dies zu erreichen, können zusätzliche Pole bzw. Nullstellen jenseits des relevanten Frequenzbereiches hinzugefügt werden.

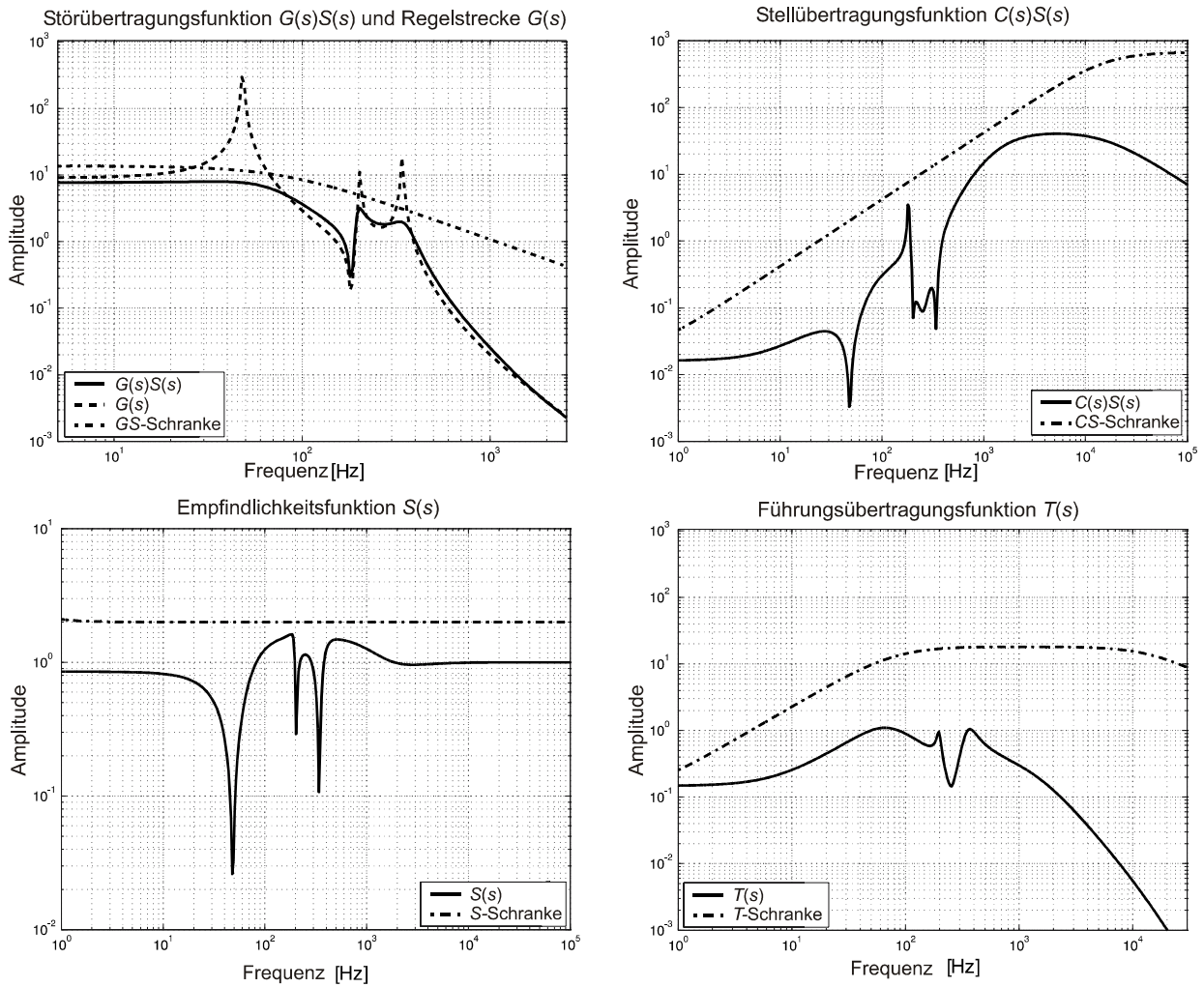


Abb. 4.23: Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises und Schranke für die Reglersynthese

Die Empfindlichkeitsfunktion $S(s)$ zeigt, wie der Verlauf von $G(s)$ durch den Regler beeinflusst wird. Wenn sie kleiner als Eins ist, wird $G(s)$ durch den Regler verringert und wenn sie größer als Eins ist, verstärkt der Regler den Verlauf von $G(s)S(s)$; deshalb ist es sinnvoll, für den gesamten Frequenzbereich eine Skalar-Übertragungsfunktion für $S(s)$ zu wählen. Als nächstes wird die Schranke auf die Stellübertragungsfunktion $C(s)S(s)$ bestimmt. Da $S(s)$ ein Skalar ist, nimmt $C(s)S(s)$ die Form von $\hat{C}(s)$ an. Es wurde nach diesem Prinzip eine Richtlinie von

$$W_e = 1, \quad W_r = \frac{1}{\kappa_S}, \quad W_{d_i} = \frac{L_{\omega_l, n_l}(s)}{\kappa_{GS}} \quad \text{und} \quad W_u = \frac{\kappa_S}{\kappa_{CS} \hat{C}(s)} \quad (4.83)$$

mit $\kappa_S < 3$ und $\kappa_{CS} > \kappa_S$ vorgegeben. Die Parameter in (4.83), die nach der Reglersynthese die Bedingungen der \mathcal{H}_∞ -Synthese erfüllen können, können nur durch die obigen Richtwerte aus einer iterativen Optimierung ermittelt werden.

Für das Rotorsystem mit zwei Scheiben wurde die Spezifikation durchgeführt. In Abb. 4.23 sind die vier Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises und die zugehörigen Schranken aufgezeigt. Die Ergebnisse sind, ausgehend von den obigen Richtwerten, durch eine iterative Optimierung ermittelt worden. Die schwarzen Linien repräsentieren die Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises. Die Regelstrecke $G(s)$ wurde bei der Störübertragungsfunktion $G(s)S(s)$ mit dargestellt, um die gedämpften Eigenfrequenzen besser erkennen zu lassen. Die dicken strichpunktierten Linien repräsentieren die Verläufe der Schranken. Es ist leicht zu erkennen, dass im ganzen Frequenzbereich und für alle Störungen die Übertragungsfunktionen unterhalb ihrer Schranken liegen, womit die Erfüllung der Anforderung der Regelgüte bestätigt wird.

4.3.9 μ -Synthese

Die Methode der \mathcal{H}_∞ -optimalen Regelung wurde bereits umfassend beschrieben, es existieren jedoch einige Einschränkungen, die sich in der Praxis nachteilig auswirken können. Eine Einschränkung liegt darin, dass die nominelle Regelstrecke und das reale System die gleiche Anzahl an instabilen Polen haben müssen, falls additive oder multiplikative Unsicherheiten verwendet werden sollen, [Eich \(1999\)](#). Wichtig ist auch, dass die Unsicherheiten, die die Differenzen zwischen Modell und wahrer Regelstrecke aufweisen, unstrukturiert sind, d.h. für die Modellfehler werden nur die Kenntnisse über ihre maximalen Beträge (frequenzabhängig) eingesetzt. Daraus ergeben sich unnötigerweise konservative Robustheitsanforderungen, welche das Erreichen der maximalen Regelgüte verhindern. Bei Mehrgrößensystemen kann auch die Einhaltung der gewünschten Regelgüte des geschlossenen Kreises nicht gewährleistet werden, wenn die Regelstrecke von ihrem Modell stark abweicht. Diese Einschränkungen lassen sich wohl mit Hilfe der μ -Methode beseitigen.

Mit dem strukturierten Singulärwert (Structured Singular Values) μ kann man die Robustheit bezüglich strukturierter Modellfehler überprüfen und die

Auswirkungen von Streckenunsicherheiten auf die Regelgüte des geschlossenen Kreises untersuchen. Der strukturierte Singulärwert μ vermeidet ebenfalls die extrem konservativen Robustheitsanforderungen. Er wird durch eine Operation ähnlich der Bestimmung der bekannten unstrukturierten Singulärwerte ausgerechnet, und liefert eine Aussage über die "Größe" der Übertragungsmatrix. Der Begriff des strukturierten Singulärwertes entsteht unter Berücksichtigung von Strukturen, die sich auf die Art der Auswirkung der Unsicherheiten im mathematischen Modell einer Regelstrecke beziehen. Die Unsicherheitsmodelle werden in einer speziellen Matrix, identisch zu der Blockstruktur Δ in den LFT, zugeschrieben.

Zur Definition des strukturierten Singulärwertes liegt das folgende Blockschaltbild in Abb. 4.24 zugrunde, die eine LFT-Modellierung darstellt. Hierin entspricht $M = P \star C$ dem geschlossenen Regelkreis zwischen dem nominellen Modell $P(s)$ und dem Regler $C(s)$. Auf äußere Signale wird verzichtet.

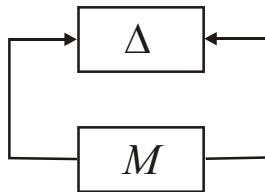


Abb. 4.24: Grundstruktur für den strukturierten Singulärwert

Für die Matrix M ist der strukturierte Singulärwert wie folgt nach [Balas \(1997\)](#) definiert:

$$\mu_{\Delta}(M) = \frac{1}{\min_{\underline{\Delta} \in \Delta} \{ \bar{\sigma}(\underline{\Delta}), \det(I - M\underline{\Delta}) = 0 \}} \quad (4.84)$$

bzw. $\mu_{\Delta}(M) = 0$, wenn es für $\underline{\Delta} \in \Delta$ keine Lösung für $\det(I - M\underline{\Delta}) = 0$ gibt.

Die Aufgabe der μ -Synthese eines Regelkreises kann man anhand des Blockschaltbildes in Abb. 4.25 formulieren.

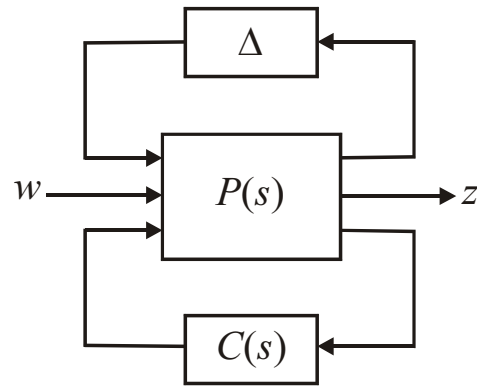


Abb. 4.25: Blockschaltbild zur Definition der Aufgabe der μ -Synthese

Das Übertragungssystem $P(s)$ aus dem Kapitel 4.3.4 stellt nun die um die Optimierungskriterien erweiterte nominelle Regelstrecke $G(s)$ dar. Die Aufgabe der μ -Synthese ist es, einen Regler $C(s)$ zu bestimmen, der für alle möglichen Störungen der modellierten Unsicherheiten das Übertragungssystem $P(s)$ stabilisiert und für die Kostenfunktion M die Einhaltung der Bedingung

$$\mu(M) < 1 \quad (4.85)$$

ermöglicht. Die μ -Berechnung erfolgt dabei bezüglich einer Blockstruktur Δ , die wie folgt definiert ist:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_S & 0 \\ 0 & \Delta_P \end{bmatrix}, \quad (4.86)$$

worin Δ_S Stabilitätsblock und Δ_P Regelgüte-Block ist. Zur Ermittlung des strukturierten Singulärwertes μ ist eine numerische Berechnung notwendig, welche eine zweifache Iteration, die sogenannte D-K-Iteration, [Doyle et al. \(1989\)](#)/[Lind et al. \(1994\)](#), erfordert. Die Software der Methode der D-K-Iteration ist im kommerziell angebotenen Programmpaket " μ -Analysis and Synthesis Toolbox" von [Balas et al. \(1995\)](#) enthalten, womit die μ -Methode einen Regler innerhalb weniger Iterationen synthetisiert. Der ermittelte Regler hat die Ordnung in Höhe der erweiterten Regelstrecke, was die praktische Implementierung erschwert. Die Reduktion der Ordnung des Reglers könnte aber zu einer Verschlechterung der Regelgüte des geschlossenen Regelkreises führen. Um dieses Problem zu vermindern, wird der Regler im geschlossenen Regelkreis reduziert, [Schönhoff \(2003\)](#). Der formalistische Ablauf der robusten Reglersynthese wurde in Abb. 4.26 als erforderliche Entwurfsschritte

zusammengefasst, wobei für die meisten Schritte weit entwickelte Lösungen und Programme vorhanden sind.

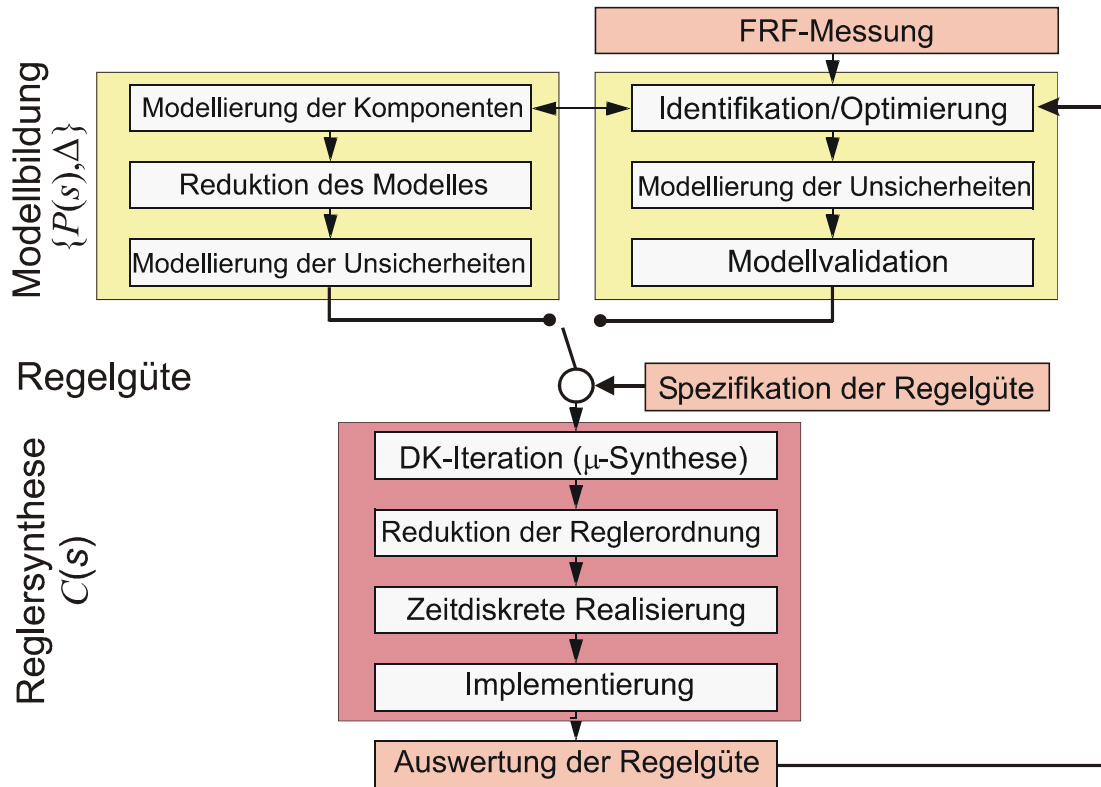


Abb. 4.26: Ablauf der robusten Reglersynthese, Schönhoff (2003)

Abschließend wird das geregelte System mit dem synthetisierten Regler in Abb. 4.27 betrachtet.

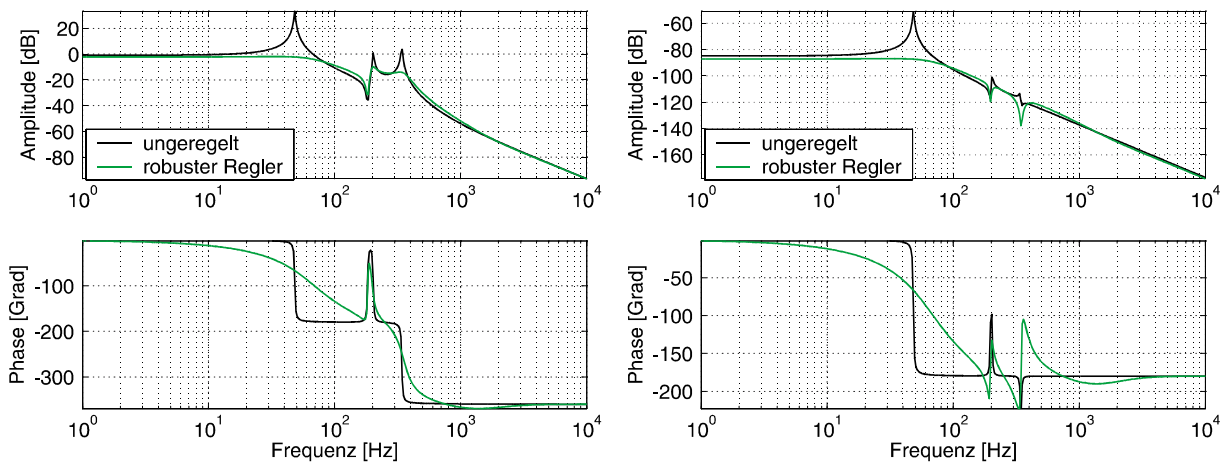


Abb. 4.27: Übertragungsfunktionen vom Aktor (links) und von der Unwucht (rechts) zum Wegsensor in der Mitte der Welle für einen aktiv gedämpften Rotor mit synthetisiertem Regler

Hier wird mit einem Wegsensor in der Mitte der Welle die Übertragungsfunktion vom Stellweg und von der Störkraft (Unwucht) zur Verschiebung der Mitte der Welle illustriert. Man erkennt, dass alle Eigenfrequenzen mit dem synthetisierten Regler gut gedämpft werden können. Der Aufwand der Reglersynthese lohnt sich besonders, wenn das System ein schlechtes dynamisches Verhalten aufweist.

4.4 Schlussbetrachtung

In diesem Kapitel wurden Regelalgorithmen verschiedener linearer, zeitinvarianter Regler für verschiedene Aktor-Sensor-Konfigurationen bestimmt, die besonders für die aktive Lagerung eines Rotors die Stabilität des geschlossenen Regelkreises unter Einhaltung der Regelgüte garantieren.

Bei der Verwendung kollozierter Aktor-Sensor-Paare existieren zahlreiche Regelungsmethoden mit einer theoretisch bedingungslosen Stabilität. Einfache und stabile Regelungen lassen sich am effektivsten durch die Kollokation erreichen. Die Eigenschaft der Kollokation von Aktor und Sensor bietet den Vorteil, selbst bei starken Änderungen der mechanischen Struktur neben der Stabilität auch die Beibehaltung der Regelgüte durch einfachste Regelalgorithmen zu gewährleisten.

Bei den Kollokationsmethoden wird die Kopplung zwischen beiden Ebenen des Rotors durch den gyroskopischen Effekt ignoriert, obwohl er physikalisch vorhanden ist. Somit werden einzelne Regelkreise für jede einzelne Ebene entworfen. Die Kopplung wirkt hier wie eine Störgröße auf die einzelnen Kreise. Diese Vorgehensweise lässt häufig gute Ergebnisse erzielen, [Nordmann \(2001\)](#).

Die bedingungslose Stabilität der Kollokation gilt nicht mehr, wenn z.B. die summierten Phasenverluste von Leistungsverstärkern, Aktoren, Sensoren und Tiefpassfiltern groß sind. Es wird hierdurch ebenfalls der erreichbare Dämpfungsgrad verringert.

Weiterhin wird häufig gefordert, den Sensor an der Stelle der eigentlichen Regelgröße zu platzieren, um deren Größe genau zu erfassen und auszuregeln,

oder mit der Platzierung des Sensors an günstigen Stellen, wo die maximale Amplitude existiert, eine deutliche Erhöhung des Dämpfungsgrades relevanter Eigenmoden zu erzielen, wenn man die Aktoren nicht beliebig platzieren kann. Dies setzt die Eigenschaften der Kollokation außer Funktion. In diesen Fällen finden die einfachen Regler keine Anwendung mehr, da die Stabilität des geschlossenen Regelkreises wegen fehlender Kollokation stark verringert wird.

Bei fehlender Kollokation oder großen Phasenverlusten im Bereich der zu dämpfenden Eigenmoden wurde mit der robusten Reglersynthese ein zweiter Weg vorgeschlagen, welcher auch unter Einschränkungen hohe Dämpfungsgrade und eine praktische Implementierung systematisch ermöglicht.

Die Synthese basiert auf dem Prinzip der Zustandsbeobachtung. Hierbei wird aus einem Modell der Regelstrecke und aus Anforderungen an die Regelgüte des geschlossenen Kreises direkt ein Regler entworfen. Da der Regler für ein Modell entworfen wird, aber später in der Praxis funktionieren soll, müssen zur Modellbeschreibung auch Modellunsicherheiten berücksichtigt werden, welche die Modellierungsungenauigkeiten und zu erwartende Parameterschwankungen der Strecke im Betrieb beschreiben. Daher liegt der große Vorteil dieser Verfahren in der Robustheit der Regelgüte gegenüber den berücksichtigten Unsicherheiten.

In Tabelle 4.1 sind die in diesem Kapitel beschriebenen Methoden zusammengefasst und die Vor- und Nachteile zusammengestellt. Einerseits wird häufig die Modellierung des Piezo-Stapelaktors als Fußpunktverschiebung empfohlen, [Preumont \(2002\)](#), besonders wenn die Steifigkeit des Aktors viel höher ist als die der mit dem Aktor in Verbindung stehenden Bauteile. Andererseits führt die Verwendung eines Wegsensors am Lager für eine günstige Kollokation von Aktor und Sensor zu einer Stabilitätseinschränkung, da dort durch das vergleichsweise starre Lager ein Knoten entsteht. Dies ist jedoch ohne praktische Bedeutung, wenn ein Kraftsensor zum Einsatz kommt, womit alle Eigenformen gut beobachtbar sind. Für diesen Fall käme der Regelalgorithmus "integrale Krafrückführung" unter kollokierten Aktor-Sensor-Konfigurationen in Frage, was zu dem erfolgversprechenden Konzept für eine aktive Dämpfung

führt. Der beschriebene Nachteil des statischen Steifigkeitsverlustes der integralen Krafrückführung sollte hierbei berücksichtigt werden, wenn die niederfrequenten Kraftanteile von Bedeutung sind. Sind diese gering, sollte die integrale Krafrückführung auch wegen ihrer theoretisch unbedingten Stabilität verwendet werden. Weiterhin besteht der Vorteil, dass durch die Verwendung des Kraftsensors keine Eingriffe in das bestehende System vorgenommen werden müssen; lediglich das passive Lager wird durch einen aktiven Lagerbock ersetzt.

Auf Grund des großen Roll-Offs kann man mit dem Regelalgorithmus "Beschleunigungsrückführung" auch für nicht kollokierte Aktor-Sensor-Konfigurationen einen stabilen Regelkreis mit einem relativ guten Dämpfungsgrad erreichen, welcher eine mit der Reglersynthese vergleichsweise erreichbare Regelgüte ermöglicht. Es könnte erwogen werden, bei fehlender Kollokation zuerst diese Methode zu erproben, bevor man den Aufwand der robusten Reglersynthese in Kauf nimmt.

Um bei der Kollokation den erreichbaren Dämpfungsgrad der relevanten Eigenmoden zu erhöhen, kann man durch Anbringen eines zusätzlichen Wegsensors an der Wellenmitte das sogenannte Kaskadenregelungskonzept durch die Überlagerung eines weiteren Regelkreises verwenden, [Nordmann \(2001\)](#).

Regelalgorithmus	Regelstrategie	Regler	+	-
Geschwindigkeitsrückführung	Weg/Beschleunigungssensor, Kraftaktor, Kollokation	$g \frac{s}{s + \omega_c}$ und $\frac{g}{s}$	einfach, robust	Kraftaktor schwer / groß Dämpfungsgrad
Beschleunigungsrückführung	Beschleunigungssensor, Kraftaktor, mit und ohne Kollokation	$\frac{g}{s^2 + 2\xi_f \omega_f s + \omega_f^2}$	einfach, robust hohes Roll-Off MIMO	Kraftaktor schwer / groß, Parameteränderung Dämpfungsgrad
Positive Wegrückführung	Wegsensor, Dehnungsaktor, Kollokation	$-\frac{g}{s^2 + 2\xi_f \omega_f s + \omega_f^2}$	einfach, robust MIMO	Steifigkeit, Stabilität, Regelgüte
Positive Krafrückführung	Kraftsensor, Dehnungsaktor, Kollokation	$-\frac{g}{s + \omega_L}$	einfach, robust alle Eigenmoden	Steifigkeit, Regelgüte
\mathcal{H}_2 - / LQG Regelung,	beliebiger Sensor, Reglersynthese	$C(s)$	Ort des Aktors und Sensors beliebig, MIMO	Stabilität (Spillover)
\mathcal{H}_∞ -Regelung, μ -Synthese	beliebiger Sensor, Reglersynthese	$C(s)$	Ort des Aktors und Sensors beliebig, MIMO, höchste Regelgüte	Modellbildung Aufwendig

Tabelle 4.1: Regelalgorithmen zur aktiven Lagerung

4.5 Beispiel

Zur besseren Erfassung des Problems wird hier ein reales Beispiel gegeben, wobei ein industrieller Kompressor in Abb. 4.28 näher untersucht wird.

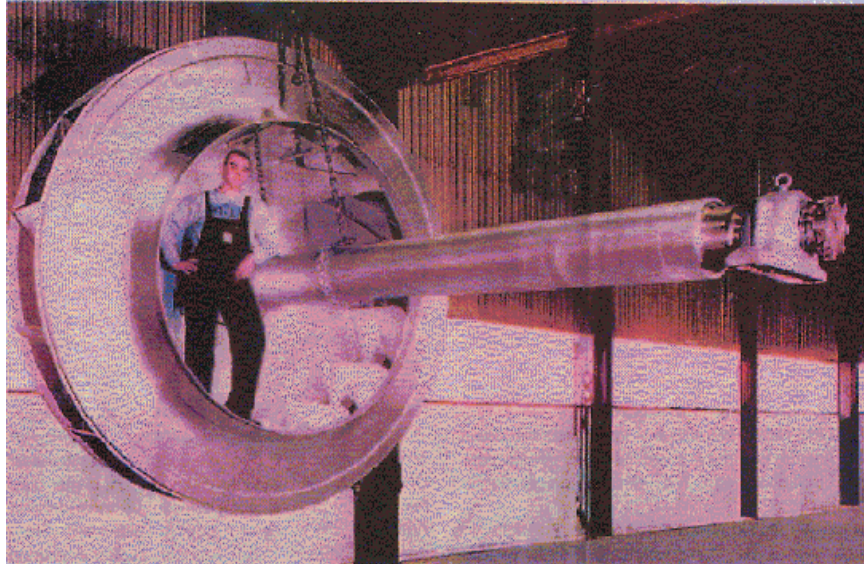


Abb. 4.28: Industrieller Kompressor

Da der Rotor (die Welle und das Lüfterrad) eine sehr geringe Dämpfung besitzt, ist es sehr problematisch, den Rotor durch den Resonanzbereich hochlaufen zu lassen. Bisher arbeitet der Kompressor bei einer etwaigen Betriebsdrehzahl von 600 U/min unter den Eigenfrequenzen. Um eine höhere Drehzahl zu erreichen, muss man den Rotor innerhalb des Resonanzbereiches ausregeln, wofür man eine aktive Dämpfung benötigt.

Die Angabedaten des Rotors sind in etwa wie folgt:

Gesamtmasse (m)	3000 kg
Läuferraddurchmesser (D)	3 m
Außendurchmesser der Welle (d)	0.4 m
Dicke der Welle (t)	0.03 m
Wellenlänge (l)	4 m
Wellensteifigkeit (S_l)	$1.17 \cdot 10^8 \text{ N/m}$

Tabelle 4.2: Daten des Kompressors

Aktorhub

Da sich der größte Teil der Masse in der Mitte der Welle befindet, wird in diesem Fall $\lambda = \frac{1}{2}$ eingesetzt. Ebenfalls nimmt man nach der Empfehlung der DIN-ISO 1940 für ein mechanisches Bauteil die Auswucht-Gütestufe $G=6,3$ mm/s. Hieraus erfolgt die Exzentrizität $e=30$ g.mm/kg für eine Betriebsdrehzahl von 2000 U/min. Der maximal notwendige Hub ergibt sich nach (3.20)

$$h = 4 \frac{G}{\Omega} = 4 \frac{6,3 \frac{\text{mm}}{\text{s}}}{209 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 120 \mu\text{m}.$$

Aktordimensionierung

Um die Aktordimensionierung durchzuführen, betrachtet man zwei unterschiedliche Fälle.

1) Die Steifigkeit des gesamten Systems ist irrelevant.

Unter dieser Voraussetzung kann man sich der Optimierung des Aktordurchmessers widmen. Ähnlich wie in Abb. 3.4 wird das normierte Diagramm für $\lambda = \frac{1}{2}$ (Abb. 4.29) erzeugt.

Der optimale Durchmesser liegt dort, wo ein minimaler Strom angezeigt wird. Wie aus Abb. 4.29 ersichtlich ist, erfordert der minimale Strom eine Aktorsteifigkeit $S_a = 0,15 S_1 = 1,65 \cdot 10^7$ N/m, wobei die gesamte Steifigkeit $S_w = 0,38 S_1$ beträgt.

Anhand des erforderlichen Hubes und der Aktorsteifigkeit entnimmt man dem vorhandenen Katalog PI-239.89 den kleinsten entsprechenden Aktor mit einem Durchmesser von 25 mm und 4,5 kN Druckkraft. In diesem Fall ist $S_a = 0,4 S_1 = 4 \cdot 10^7$ N/m und $S_w = 0,60 S_1$. Damit erreicht man $d = 1,3 d_{opt}$ und $i = 1,2 i_{opt}$.

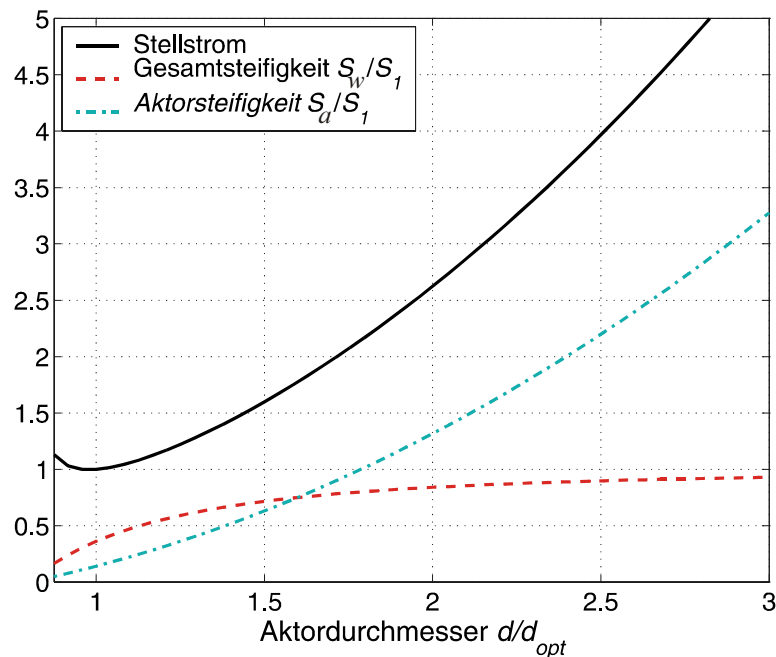


Abb. 4.29: Normierte Werte für Strom und Steifigkeit des Aktors in Abhängigkeit vom normierten Durchmesser für $\lambda = 1/2$, Alizadeh et al. (2003)

2) Die gesamte Steifigkeit darf mindestens 90% der passiven Steifigkeit betragen, d.h. $S_w = 0,9 S_1$.

Formt man (3.15) um, ergibt sich $S_w = 0,1 S_a / \lambda^2$, daraus folgt:

$$\frac{1}{0,9S_1} = \frac{\lambda^2}{S_a} + \frac{1}{S_1} \Rightarrow \frac{1}{4S_a} = \frac{1}{S_1} - \frac{1}{0,9S_1} \Rightarrow S_a = 2,2S_1 = 2,5 \cdot 10^8 \frac{N}{m}$$

Aus Abb. 4.29 kann man feststellen, dass der notwendige Stellstrom $i = 4,1 i_{opt}$ ist. Ebenfalls kann man hier aus PI (2001) den Aktor mit dem Kennzeichen PI-247.70 entnehmen. In Abb. 4.30 ist der ausgewählte Stapelaktor (rechts) dargestellt. Man erzielt einen Aktordurchmesser von $d = 49,8 \text{ mm}$, eine maximale Druck- bzw. Blockierkraft von 30 kN und eine elektrische Kapazität von 6560 nF.



Abb. 4.30: Hochvolt-Stapelaktoren von PI

Man erkennt hier, dass es in beiden Fällen möglich ist, eine aktive Dämpfung zu erreichen. Da ein Kompressor meistens eine gute Dichtung benötigt, welche eine hohe Steifigkeit erfordert, wird bei einer weiteren Untersuchung des zweiten Falles berücksichtigt, wobei $S_w = 90\% S_l$ ist.

Rotormodellierung

Zur Vereinfachung werden das Lüfterrad als eine Scheibe und die Wälzlager als starr angenommen. Die Modellbildung aus einem FE-Programm ist in Abb. 4.31 präsentiert, wobei die ersten drei Eigenformen in einer Ebene mit dargestellt worden sind.

Die erste Eigenfrequenz liegt hier bei 1200 U/min. Um die Betriebsdrehzahl bei 2000 U/min zu erreichen, muss der Rotor durch die erste Resonanz durchfahren. Hieraus ergibt sich als Ziel, die erste Eigenmode am Ort der maximalen Auslenkung zu dämpfen.

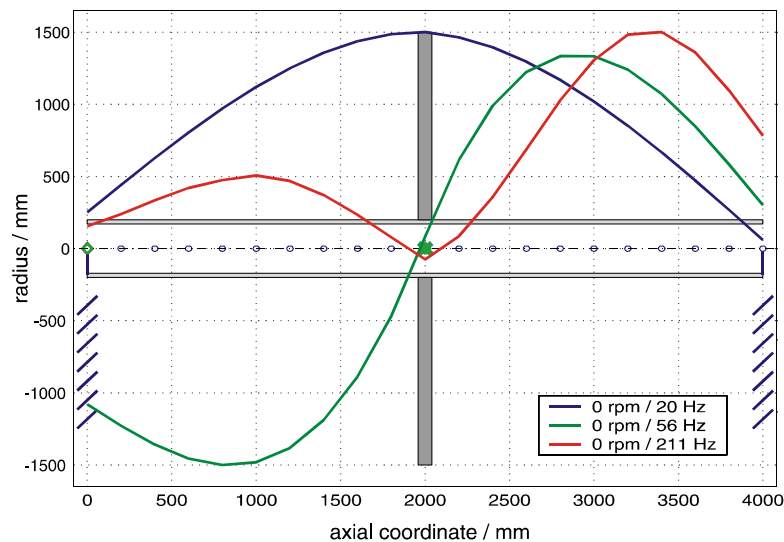


Abb. 4.31: Das Modell des industriellen Kompressors

Regelungsentwurf

Es werden hier zwei Regelkonzepte angewendet, nämlich die integrale Kraftrückführung und die robuste Synthese. Als Sensoren werden

Kraftmessdosen vorgesehen, welche am Lager in Reihe mit den Piezoaktoren angebracht werden müssen. Die Ergebnisse sind in Abb. 4.32 dargestellt, wobei als Eckfrequenz des Tiefpassfilters bei der integralen Krafrückführung $\omega_L = 0.7\omega_0$ gewählt wird. Nach einer iterativen Spezifikation wurden für die robuste Synthese die Parameter $\kappa_S = 1$, $\kappa_{GS} = \hat{C}(s)^{-1}$ und $\kappa_{CS} = 0.9\hat{C}(s)$ mit $\hat{C}(s)$ als ein Integrator-Glied abgestimmt.

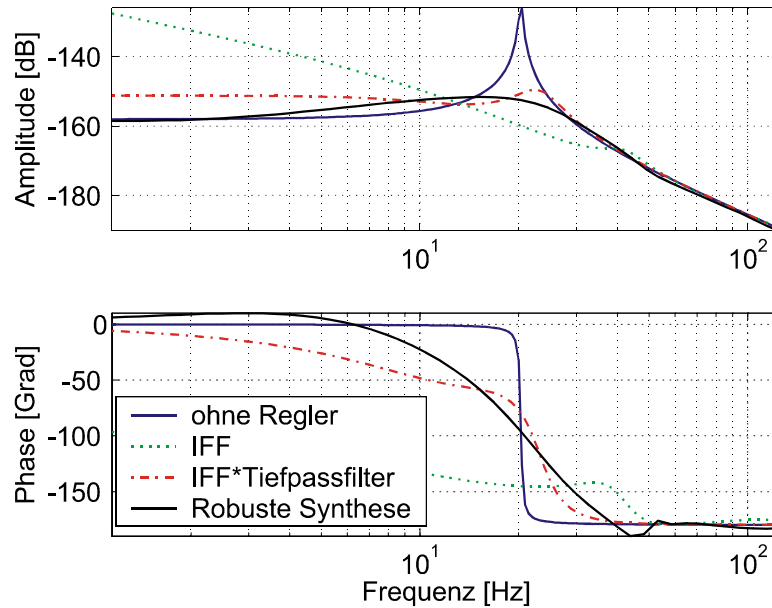


Abb. 4.32: Vergleich des aktiv gedämpften Systems mit dem IFF und synthetisierten Regler

Man sieht den guten Dämpfungserfolg mit der integralen Krafrückführung bei der Rotoreigenfrequenz. Ebenso wird der beschriebene Nachteil des statischen Steifigkeitsverlustes deutlich, was aber bei reiner Unwuchtanregung unproblematisch wäre. Statische Kräfte würden allerdings zu einer großen Verlagerung des Wellenmittelpunktes und natürlich auch des aktiven Lagers führen. Der größere Entwurfsaufwand der robusten Reglersynthese lohnt sich sowohl wegen der sehr guten aktiven Zusatzdämpfung als auch der wesentlich geringeren Beeinträchtigung des statischen Systemverhaltens.

